מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 6

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. ציירו את דיאגרמת הסה של שריג המחלקים של 90.

2. ניזכר בהגדרת יחס השקילות $R_B := \left\{ (C_1, C_2) : C_1 \cap B = C_2 \cap B \right\}$.
תהי A קבוצה, נגדיר: $X := \left\{ R_B : B \subseteq A \right\}$.
נגדיר על X את יחס הסדר הכלה, כלומר נביט בקס"ח $(X, \subseteq)$.
הוכיחו: X הוא שריג (רמז: היעזרו בתרגיל המודרך, תרגיל 5).

3. נגדיר את הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ על פי: $f(n) := \max\left\{ m : 2^m \mid n \right\}$ (לדוגמה, $f(3) = 0,\ f(6) = 1$). ונגדיר את היחס $\preceq$ על $\mathbb{N}$ באופן הבא: $a \preceq b$ אמ"ם $f(a) \le f(b)$.
א. הוכיחו: $\preceq$ הוא קדם- סדר.
כעת נגדיר על $\mathbb{N}$ את יחס השקילות: $a \approx_{\preceq} b$ אמ"ם $a \preceq b$ וגם $b \preceq a$. בתרגול ראינו שהיחס $\preceq^{\approx_{\preceq}}$ המושרה על ידי $\preceq$ על מחלקות השקילות $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$ הוא יחס סדר חלקי.
ב. הוכיחו כי $\preceq^{\approx_{\preceq}}$ הוא יחס סדר לינארי על $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$.
ג. מצאו את הסופרימום והאינפימום (אם קיימים, אחרת ציינו שלא) של תת הקבוצות הבאות של $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$ עם יחס הסדר $\preceq^{\approx_{\preceq}}$:
1) $\left\{ [a] : f(a) \text{ is prime} \right\}$.
2) $\left\{ [a] : f(a) < 10 \right\}$.

4. ציינו והוכיחו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם חח"ע ו/או על:
א. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\},\ f(n) = |n|$.
ב. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.
ג. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x$.

5. תהיינה A, B, C, D קבוצות ו- $f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$ פונקציות. הוכיחו או הפריכו:
א. אם $h \circ g \circ f$ הפיכה, אז g חח"ע או g על.
ב. אם $h \circ g \circ f$ חח"ע ו- $h \circ g$ חח"ע, אז $g \circ f$ חח"ע.
ג. אם $h \circ g \circ f$ על ו- $h \circ g$ על, אז $g \circ f$ על.
ד. אם $h \circ g \circ f$ על ו- $g \circ f$ על, אז $h \circ g$ על.
ה. אם $g \circ f$ הפיכה ו- $h \circ g$ הפיכה, אז g הפיכה.
ו. אם $g \circ f$ הפיכה ו- $h \circ g$ הפיכה, אז $h \circ g \circ f$ הפיכה.

6. תהי $f:A\to B$ פונקציה.

א. הוכיחו: אם $C\subseteq A$ אזי $C\subseteq {}"f^{-1}"\left({}"f"(C)\right)$.

ב. תנו דוגמה לפונקציה $f:A\to B$ ו-$C\subseteq A$ כך שההכלה בסעיף א' היא הכלה ממש.

ג. הוכיחו כי בסעיף א' מתקיים שוויון לכל $C\subseteq A$ אמ"מ f חח"ע.

ד. הוכיחו: אם $D\subseteq B$, אזי $"f^{-1}"(D)={}"f^{-1}"\left({}"f"\left({}"f^{-1}"(D)\right)\right)$.

7. תהי $f:A\to B$. נגדיר $g:P(B)\to P(A)$ לפי: $g(X)={}"f^{-1}"(X)$. הוכיחו: f חח"ע אמ"מ g על.