אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 3

11 בנובמבר 2018

1. נתון המספר המרוכב $z = r\text{cis}\theta, r > 0$, ונתון עוד מספר $w = \frac{z}{\bar{z}}$.
א. הביעו באמצעות r, θ את $w, \overline{w}, -\frac{1}{w}$.
ב. נתון ש w נמצא ברביע הראשון. מהו טווח הזויות האפשרי עבור θ?
ג. נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_1 = \frac{1}{z}, a_2 = w$. הראו שאם z נמצא מחוץ למעגל היחידה אז גם a_5 נמצא מחוץ למעגל היחידה.

<u>פתרון:</u>

א. $w = \frac{r\text{cis}\theta}{r\text{cis}(-\theta)} = \text{cis}(\theta - (-\theta)) = \text{cis}2\theta$, ולכן נקבל: $\overline{w} = \text{cis}(-2\theta)$. על מעגל היחידה ההופכי והצמוד הם אותו דבר (באופן כללי: להופכי ולמצוד יש אותה זוית, והנורמות הופכיות אחת לשניה. על מעגל היחידה הנורמות מתלכדות ולכן זה יוצא אותו מספר.), ולכן נקבל: $-\frac{1}{w} = -\overline{w} = \text{cis}(\pi - 2\theta)$.

ב. הנתון נותן לנו תנאי על הזוית של w: $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$, ולכן נקבל שהטווח עבור θ הוא $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

ג. נבדוק מה המנה: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{w}{\frac{1}{z}} = w \cdot z = \text{cis}2\theta \cdot r\text{cis}\theta = r\text{cis}3\theta$. נקבל מכאן ש- $a_5 = a_1 \cdot q^4 = \frac{1}{r}\text{cis}(-\theta) \cdot (r\text{cis}3\theta)^4 = \frac{1}{r}\text{cis}(-\theta) \cdot r^4\text{cis}12\theta = r^3\text{cis}11\theta$.
כעת, אם $r > 1$ אז גם $r^3 > 1$, ולכן אם z מחוץ למעגל אז גם a_5.

2. פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים ממשיים ממעלה לכל היותר 2:
א. $x^4 + 16$
ב. $x^3 + 1$

<u>פתרון:</u>

א. נמצא את פתרונות המשוואה $z^4 = -16 = 16\text{cis}\pi$: $z_k = 2\text{cis}(\frac{\pi+2\pi k}{4}), k \in \{0, 1, 2, 3\}$. הזויות הן: $\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$, ומכאן ששני הצמדים הם: $\{2\text{cis}\frac{3\pi}{4}, 2\text{cis}\frac{5\pi}{4}\}, \{2\text{cis}\frac{\pi}{4}, 2\text{cis}\frac{7\pi}{4}\}$.
מכאן נוכל למצוא את הגורמים:

הראשון:

$$(x - 2\text{cis}\frac{\pi}{4})(x - 2\text{cis}\frac{7\pi}{4}) = x^2 - 2Re(2\text{cis}\frac{\pi}{4})x + |2\text{cis}\frac{\pi}{4}|^2 = x^2 - 4\cos\frac{\pi}{4}x + 4 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$$

השני:

$$(x - 2\text{cis}\frac{3\pi}{4})(x - 2\text{cis}\frac{5\pi}{4}) = x^2 - 2Re(2\text{cis}\frac{3\pi}{4})x + |2\text{cis}\frac{3\pi}{4}|^2 = x^2 - 4\cos\frac{3\pi}{4}x + 4 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 4$$

ובסה"כ:

$$x^4+16=(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)$$

ב. נמצא את פתרונות המשוואה $z^3=-1=\text{cis}180$: $z_k=\text{cis}60+120k, k\in\{0,1,2\}$. הזויות הן: $\{60,180,300\}$. זוית של 180 נותנת לנו מספר ממשי (-1), וממנה נקבל את גורם ממעלה 1: $x+1$.

שתי הזויות האחרות נותנות לנו שני מספרים צמודים שמהם נקבל את הגורם השני:

$$(x-\text{cis}60)(x-\text{cis}300)=x^2-2Re(\text{cis}60)+|\text{cis}60|^2=x^2-2\cos 60+1=x^2-x+1$$

ובסה"כ:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

בהצלחה!