תרגיל 7

שאלה 1

א. נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים וכן כי $\lim_{x\to x_0} g(x)$ לא קיים. מה ניתן לאמר על קיום או אי-קיום $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$?

ב. נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים וכי $\lim_{x\to x_0} g(x)$ לא קיים. מה ניתן לאמר על קיום או אי-קיום $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$?

פתרון:

א) לא ניתן לומר כלום:

גבול יכול להיות קיים

למשל: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} -1 & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

קל לראות שהגבולות של f ושל g לא קיימים ב־$x = 0$ אבל גבול של $f(x)+g(x)$ קיים:

$lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = lim_{x\to 0}0 = 0$

מצד שני הגבול יכול להיות לא קיים:

$f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$ ולכן $lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = lim_{x\to 0}\frac{2}{x}$ לא קיים.

ב) נוכיח שגבול בהכרח לא קיים:

נגדיר פונקציה $h(x) = f(x)+g(x)$ ונניח בשלילה שהגבול של h קיים ב־x_0

נעביר f אגף ונקבל: $g(x) = h(x) - f(x)$

$lim_{x\to x_0}g(x) = lim_{x\to x_0}(h(x)-f(x)) = lim_{x\to x_0}(h(x)) - lim_{x\to x_0}(f(x))$

לפי הנחת השלילה הגבול מצד ימין קיים מה שגורר שגבול של g ב־x_0 קיים בסתירה לנתון.

ולכן גבול של הסכום לא קיים.

שאלה 2

מצאו את קבוצות כל הנקודות בהן הפונקציות הבאות רציפות:

א. $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)(x-3)^{1/3}}$

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ בתחום זה הפונקציה רציפה כמכפלה ומנה של פונקציות רציפות.

ב. $f(x)=\sqrt[4]{x^2-x^3}$

פתרון: $x^2-x^3\ge 0\Leftrightarrow x^2(1-x)\ge 0\Leftrightarrow x\le 1$, כלומר $D(f)=(-\infty,1]$ ובתחום זה הפונקציה רציפה כשורש של פונקציה אי שלילית רציפה.

אפשר גם להגיד שהפונקציה רציפה כהרכבה של שתי פונקציות רציפות:

$\forall x\in(-\infty,1]\quad g(x)=x^2-x^3\ge 0$ ו- $h(x)=\sqrt[4]{x}$. $f(x)=(h\circ g)(x)$

ג. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} & x\ge 2, x\ne 4\\ \dfrac{2}{3} & x=4\end{cases}$

פתרון: $D(f)=[2,\infty)$. לכל $x\in[2,4)\cup(4,\infty)$ הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק האם הפונקציה רציפה ב- $x=4$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=st\left(\frac{2\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{9+2\Delta x}+3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

כאשר $\Delta x\ne 0,\ \Delta x\approx 0,\ x=4+\Delta x$.

קיבלנו $\lim_{x\to 4}f(4)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\ne\dfrac{2}{3}=f(4)$ ולכן $x=4$ נקודת אי רציפות סליקה.

שאלה 3

מיינו נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות וקבעו את סוג אי הרציפות:

א. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק את סוג אי הרציפות ב- $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$$

(קיבלנו מספר אינפיניטסימלי חלקי מספר סופי שאינו אינפיניטסימלי ולכן הגבול אפס).

הגבול קיים, אך הפונקציה לא מוגדרת בנקודה ולכן $x=0$ נקודת **אי רציפות סליקה**.

ב. $f(x)=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

פתרון: $D(f)=[-7,\infty)\setminus\{-2,2\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כהרכבה ומנה של פונקציות רציפות

נקודות אי רציפות הן $x=\pm 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}$$

הגבול קיים וסופי ולכן $x=2$ נקודת **אי רציפות סליקה**.

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{(x-2)(x+2)}=st\left(\frac{\sqrt{5+\vartriangle x}-3}{\vartriangle x\left(-4+\vartriangle x\right)}\right)$$

כאשר $x=-2+\vartriangle x,\ \vartriangle x\approx 0,\ \vartriangle x>0$. במקרה זה המספר $\frac{\sqrt{5+\vartriangle x}-3}{\vartriangle x\left(-4+\vartriangle x\right)}$ הינו מספר אינסופי ולכן החלק הסטנדרטי שלו לא מוגדר ולכן הגבול מימין בנקודה $x=-2$ אינו קיים

ולכן $x=-2$ נקודת **אי רציפות מסוג שני**.

שאלה 4

עבור איזה ערך של a פונקציה הבאה תהיה רציפה בנקודה $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 5x+2 & x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

פתרון:

נשים לב שהפונקציה רציפה בכל $x \neq 0$.

נבדוק רציפות בנקודה $x = 0$, נרצה שיתקיים:

$$lim_{x\to 0^+} f(x) = lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 2$$

$$lim_{x\to 0^-} f(x) = lim_{x\to 0^-} (5x+2) = 2$$

$$lim_{x\to 0^+} f(x) = lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2}\right) = lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2} \frac{\sqrt{1+ax^2}+1}{\sqrt{1+ax^2}+1}\right) =$$

$$= lim_{x\to 0^-} \frac{ax^2}{x^2(\sqrt{1+ax^2}+1)} = \frac{a}{2}$$

ולכן כדי שהגבול יהיה קיים נדרוש ש־$\frac{a}{2} = 2$ ולכן $a = 4$.

שאלה 5

האם הפונקציה הבאה רציפה ב- $x = -5$? האם היא גזירה בנקודה זו?

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+5} & ,x > -5 \\ 5x+26 & ,x \leq -5 \end{cases}$$

פתרון:

נשים לב שפונקציה מוגדרת בנקודה $x = -5$ והערך שלה $f(-5) = 1$

נבדוק הגבול ב־$x = -1$ קיים ושווה ל־1. נחשב את הגבולות החד צדדים ונבדוק האם הם שווים:

מימין: יהי $x \approx -5$, $x = -5 + \Delta x$ כאשר $\Delta x > 0$

$$lim_{x\to -5^+} f(x) = st(e^{\Delta x}) = 1$$

משמאל: יהי $x \approx -5$, $x = -5 + \Delta x$ כאשר $\Delta x < 0$

$$lim_{x\to -5^-} f(x) = st(5(-5+\Delta x)+26) = 1$$

קיבלנו שהגבולות החד צדדיים קיימים ושווים ולכן הגבול קיים ומתקיים

$lim_{x\to -5} f(x) = 1 = f(1)$ ולכן $f(x)$ רציפה ב־$x = -5$

תרגיל 6

חשב את הגבולות הבאים בעזרת כללים (אריתמטיקה של גבולות, רציפות, כפל בצמוד וכו')

1) $lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x}$

פתרון:

$lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x}=lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$

2) $lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

פתרון:

$lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=lim_{x\to 0}\frac{x^2+9-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{9}$

3) $lim_{x\to 1}\frac{sin(x)ln(x+1)}{x^2-4}$

פתרון:

הפונקציה רציפה בנקודה $x=1$ ולכן הגבול שלה שווה לערך שלה בנקודה, הציבו את הנקודה וקבלו את הגבול.