

קורס: 83-211-01

מרצה: ש. הורוביץ

ט' אייר תש"ע

מבחן בפונקציות מרוכבות

מועד ב

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 22 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים.

1. הוכיחו שאם $|z|=1$ אז הביטוי $\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}$ ממשי.

2. נניח שהפונקציות $u(x, y)$ ו- $v(x, y)$ הן בעלות נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2 בכל \mathbb{R}^2 ומקיימות שם את משוואות קושי-רימן. הוכיחו שגם הפונקציות $u_x - v_y$ ו- $v_x + u_y$ מקיימות את משוואות קושי-רימן.

3. חשבו את $\int_{\gamma} \cos z dz$ כאשר γ היא קשת של האליפסה $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ מהנקודה $(2, 0)$ עד הנקודה $(0, 3)$.

4. נגדיר $g(z) = \frac{z^3}{e^{1/z^2}}$.

א. מצאו את טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0 = 0$.

ב. חשבו $\oint_{|z|=3} g(z) dz$.

5. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+4)^2} dx$ והצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!