תרגיל כיתה 5 –אנליזה מודרנית

1. **תרגיל:**

תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ותהי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה ממשית. הראו שהקבוצה $\{x \in U : f \text{ is continuous at x}\}$ היא מטיפוס G_δ.

פתרון:

לכל $x \in U, \delta > 0$ נגדיר את התנודה ("oscillation") של f בכדור $B(x,\delta)$ ע"י $\omega(x,\delta) := \sup\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B(x,\delta)\}$, ונקודתית ע"י $\omega(x) := \inf\{\omega(x,\delta) : \delta > 0\}$.

אנו טוענים שלכל a ממשי הקבוצה $E_a = \{x : \omega(x) < a\}$ היא פתוחה.

הוכחת הטענה:

יהי $x_0 \in E_a$, ישנה $\delta_0 > 0$ כך ש- $\omega(x_0,\delta_0) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B(x_0,\delta_0)\} < a$ (אחרת ה-inf של כולם לא היה קטן מ-a). לכן לכל $x \in B\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)$,

$$\omega\left(x, \frac{\delta_0}{2}\right) = \sup\left\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B\left(x, \frac{\delta_0}{2}\right)\right\} \le \sup\{|f(s) - f(t)| : s,t \in B(x_0,\delta_0)\} < a$$

ומכאן כ-inf, $\omega(x) < a$ לכל $x \in B\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)$, והטענה הוכחה.

ניתן לראות כי f רציפה בנקודה x או"א $\omega(x) = 0$ (אין תנודה בנקודה x) ולכן:

$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x : \omega(x) < \frac{1}{n}\right\} = \{x : \omega(x) = 0\} = \{x : f \text{ is continuous at x}\}$. הקבוצות $E_{\frac{1}{n}}$ כולן פתוחות, ולכן הקבוצה המדוברת היא באמת מטיפוס G_δ. מש"ל.

הערה:

ניתן להוכיח שזה נכון בכל מרחב מטרי.

למת פאטו

תזכורת: ראינו בהרצאה את למת פאטו האומרת שאם $f_n : X \to [0,\infty]$, פונקציות מדידות אזי מתקיים $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

דוגמא לאי שוויון חזק:

נתבונן בממ"ח $(\mathbb{R}, L, m)$, ונגדיר סדרת פונקציות פשוטות ע"י $f_n(x) = \frac{1}{n}$. קל לראות:

1. $\underline{\lim} f_n = 0$

2. לכל n $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n dm = \infty$

ולכן האי-שוויון בלמת פאטו הוא חזק: $0 < \infty$.

2. תרגיל (למת פאטו ההפוכה) : הוכיחו כי אם $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות המוגדרות על הממ"ח (X, S, μ). אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $|f_n| \le g$ לכל n, אזי

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \le \int\limits_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

פתרון: נסתכל על סדרת הפונקציות $h_n = g - f_n$, זוהי כמובן סדרה חיובית. בנוסף, האינטגרל $\int\limits_X h_n d\mu = \int\limits_X (g - f_n) d\mu = \int\limits_X g d\mu - \int\limits_X f_n d\mu$, ולכן מוגדר היטב. כעת, עפ"י למת פאטו נקבל

$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) d\mu = \int\limits_X \left(\liminf_{n\to\infty} g + \liminf_{n\to\infty} (-f_n)\right) d\mu$$

$$= \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} g d\mu + \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} (-f_n) d\mu = \int\limits_X g d\mu - \int\limits_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X (g - f_n) d\mu$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X -f_n d\mu = \int\limits_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \le \int\limits_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

3. אם f_n הינה סדרה של פונקציות אי-שליליות ואינגרביליות כך ש $f_n \downarrow f$, הראו כי $\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

פתרון: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int\limits_X f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

מצד שני, עפ"י למת פאטו ההפוכה, נובע כי $\limsup_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \le \int\limits_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$.

לסיכום, קיבלנו $\limsup_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \le \int\limits_X f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$, ומכאן ש

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$$

4. <u>**תזכורת- משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג:**</u>

אם $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots \le +\infty$ כולן מדידות לבג, אזי פונקצית הגבול שלהן קיימת ומדידה ומתקיים $\int\limits_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

<u>**תרגיל:**</u>

תהי $f \ge 0$ פונקציה מדידה ואי-שלילית המקיימת $\int_X f d\mu = 0$, הוכיחו כי הקבוצה שבה f חיובית-ממש היא בעלת מידה 0.

<u>פתרון:</u>
נגדיר $E := \{x \in X : f(x) > 0\}$, ו-$f_n(x) = n \cdot f(x)$. קל לראות שהסדרה $\{f_n\}$ עומדת בתנאי משפט ההתכנסות המונוטונית ולכן $\int_X \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X nfd\mu = \lim_{n\to\infty} n \cdot \int_X fd\mu = 0$.
נניח בשלילה כי $\mu(E) > 0$, $E \subseteq X$ ולכן $\int_E \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) d\mu \le \int_X \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) d\mu$. אבל לכל $x \in E$ מתקיים $f(x) > 0$ ולכן $\left(f_n|_E\right)(x) = n \cdot f(x) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. בסה"כ קיבלנו:
$\infty = \infty\mu(E) = \int_E (\infty) d\mu \le \int_X \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) d\mu$. זו סתירה ולכן מש"ל.

<u>תרגיל:</u> חשבו את הגבול $I := \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) dm(x)$. הצדיקו את תשובתכם.

<u>פתרון:</u> ניתן לרשום את הגבול בצורה הבאה:
$I = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) I_{(0,n)}(x) dm(x)$. ברוח זו נגדיר את הפונקציות המדידות לבג (כי הן רציפות) $f_n(x) := \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) I_{(0,n)}(x) \ge 0$ נטען כעת כי $\{f_n\}$ היא סדרה עולה.
<u>הוכחה:</u>
יש להראות כי לכל $0 < x < \infty$

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) I_{(0,n)}(x) \le \left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right) I_{(0,n+1)}(x)$$

נחלק למספר מקרים:
1. אם $x \ge n+1$ שני האינדיקטורים מתאפסים ומתקיים אי השוויון.
2. אם $n \le x < n+1$ זה נכון כי f_{n+1} אי שלילית.
3. אם $0 < x < n$ צ"ל $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) \le \left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)$

נראה זאת בשני שלבים:
א. $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le \left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$
ב. $\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) \le \log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)$

<u>הוכחת השלבים:</u>

א. אנחנו רוצים להראות כי עבור $0 \le x < n$ מתקיים

$$\frac{\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{1-\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n}}\right)^{n}\left(1-\frac{x}{n+1}\right)=\left(\frac{\frac{n+1-x}{n+1}}{\frac{n-x}{n}}\right)^{n}\left(1-\frac{x}{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{n(n+1-x)}{(n-x)(n+1)}\right)^{n}\left(1-\frac{x}{n+1}\right)=\left(1+\frac{x}{(n-x)(n+1)}\right)^{n}\left(1-\frac{x}{n+1}\right)$$

$$>\left(1+\frac{nx}{(n-x)(n+1)}\right)\left(1-\frac{x}{n+1}\right)=1-\frac{x}{n+1}+\frac{nx}{(n-x)(n+1)}-\frac{nx^{2}}{(n-x)(n+1)^{2}}\ge 1$$

שזה שקול ל

$$nx(n+1)-x(n-x)(n+1)-nx^{2}\ge 0$$

$$nx(n+1)-x(n-x)(n+1)-nx^{2}=x^{2}\ge 0$$

ב. פונקצית הקוסינוס יורדת בקטע $(0,1)$ ולכן עבור n גדול מספיק נקבל $\cos\left(\frac{x}{n}\right)\le\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$
נוסיף 2 לשני האגפים ונפעיל לוג (שהיא פונקציה עולה) לקבל את הדרוש.

ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג

$$I=\int_{(0,\infty)}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)I_{(0,n)}(x)\right]dm(x)=$$

$$=\int_{(0,\infty)}\left[e^{-x}\log(2+1)I_{(0,\infty)}(x)\right]dm(x)=\log(3)\int_{(0,\infty)}e^{-x}dm(x)$$

בהמשך **אולי** נראה את הקשר לאינטגרל הלא אמיתי מתורת רימן ואז ניתן להגיע לתשובה הסופית $I=\log(3)$.