אינפי 1 החממה - תרגול 7

3 בדצמבר 2020

1 מבחני התכנסות לטורים חיוביים.

ראינו בתרגול שעבר מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי.
ראיתם בהרצאה: מבחן המנה, מבחן השורש, ומבחן העיבוי.
תרגילים:

1. $\sum \frac{n^3}{(\ln 3)^n}$
פתרון: ננסה מבחן המנה:

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup \frac{\frac{(n+1)^3}{(\ln 3)^{n+1}}}{\frac{n^3}{(\ln 3)^n}} = \frac{(n+1)^3 \ln^n 3}{n^3 \ln^{n+1} 3} = \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{1}{\ln 3} \to \frac{1}{\ln 3} < 1$$

ולכן הטור שלנו מתכנס לפי מבחן המנה.

2.

(א) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n}$.
פתרון: נשתמש במבחן העיבוי שאומר: אם הסדרה מונו' יורדת אז הטור $\sum a_n$ והטור $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \log(2^n) \log(\log(2^n))} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log 2 \log(n \log 2)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log 2 (\log n + \log \log 2)}$$

כעת נעשה מבחן השוואה עם $\frac{1}{n \log n}$ שמתבדר:

$$\frac{1}{n \log 2 (\log n + \log \log 2)} \geq \frac{1}{\log 2 \cdot n \log n}$$

כיון שהימני מתבדר (ראו הרצאה) אז גם הטור שקיבלנו ממבחן העיבוי מתבדר, ולכן גם שלנו מתבדר.

(ב) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n\log((\log n)^{1+\epsilon})}$
פתרון: שוב לפי מבחן העיבוי:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\log 2^n\log\log^{1+\epsilon}2^n}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log 2(1+\epsilon)\log(n\log 2)}$$

טור זה מתבדר כמו הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log 2\log(n\log 2)}$ מסעיף א, לפי מבחן ההשוואה הגבולי:

$$\frac{\frac{1}{n\log 2\log(n\log 2)}}{\frac{1}{n\log 2(1+\epsilon)\log(n\log 2)}}=1+\epsilon$$

קיבלנו גבול סופי וחיובי ולכן מתבדרים יחד.

(ג) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n(\log(\log n))^{1+\epsilon}}$
פתרון: שוב, מבחן העיבוי:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\log 2^n\left(\log(\log 2^n\right)^{1+\epsilon}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log 2(\log(n\log 2))^{1+\epsilon}}$$

נעשה על זה שוב עיבוי:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\log 2(\log(2^n\log 2))^{1+\epsilon}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\log 2(n\log 2+\log\log 2)^{1+\epsilon}}$$

טור זה מתכנס כמו $\sum\frac{1}{n^{1+\epsilon}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$
מבחן השורש:

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{2^{n-1}}{n^n}}=\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\cdot 2}{n}\to 0$$

לפי מבחן השורש מתכנס.

4. $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n2^n} & n=2k\\ \frac{1}{(n+1)2^{n-1}} & n=2k+1\end{cases}$. $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$.
פתרון: בגלל הפיצול מבחן המנה לא יעבוד, כי נקבל גבולות שונים לזוגיים ואי־זוגיים:כאשר n זוגי:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+2)2^n}}{\frac{1}{n2^n}}=\frac{n}{n+2}\to 1$$

וכאשר n א"ז:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{(n+1)2^{n-1}}}=\frac{1}{4}$$

לכן $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ ולא ניתן לדעת. כן ניתן לפתור בעזרת מבחן השורש:

$$\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} & n=2k\\ \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)2^{n-1}}} & n=2k+1\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt[n]{n}} & n=2k\\ \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}\frac{2}{\sqrt[n]{2}}} & n=2k+1\end{cases}\to\frac{1}{2}<1$$

אך ניתן גם יותר בקלות: מבחן ההשוואה הבא: כיון שכידוע $\sum\frac{1}{2^n}<\infty$ וכיון ש:

$$a_n\le\frac{1}{2^n}$$

נקבל שהטור שלנו $\sum a_n\le\sum\frac{1}{2^n}<\infty$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

פתרון: זהו טור טלסקופי, ולכן נקבל שסדרת הסכומים החלקיים:

$$S_N=(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{N-1}-\sqrt{N-2})+(\sqrt{N}-\sqrt{N-1})=\sqrt{N}\to\infty$$

ולכן הטור מתבדר.

6. יהי $a>0$ והטור הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$

פתרון: עצרת רומזת שכדאי לנסות את מבחן המנה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\frac{a}{n+1}\to 0$$

ולכן מתכנס לפי מבחן המנה.

7. חשבו את $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ עם דיוק של 0.001 .

פתרון: כאשר יש טור מתכנס אז הזנב $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n=0$. אצלנו נרצה שהזנב יהיה קטן מ 0.001 .נחשב את הזנב:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{(m+1)!}+\frac{1}{(m+2)!}+\cdots=\frac{1}{(m+1)!}\left(1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\cdots\right)<$$

$$<\frac{1}{(m+1)!}\left(1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\frac{1}{(m+2)^3}+\cdots\right)=\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{m+2}}\right)=\frac{m+2}{(m+1)!\cdot(m+1)}$$

אנחנו רוצים ש־ $\frac{m+2}{(m+1)!\cdot(m+1)}<0.001$, ומקבלים שעבור $m=6$ אכן זה מתקיים, ולכן נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{n!}+r$ כאשר $r<0.001$ זה הזנב שחישבנו. ולכן התשובה לשאלה היא:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=2.718$$

ממממ זה מזכיר לנו את e... נחכה בבסבלנות להמשך הקורס.