1. הוכיחו שלכל x, y המקיימים: $0 < y \leq x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים:

$$\frac{x-y}{\cos^2 y} + \tan y \leq \tan x \leq \frac{x-y}{\cos^2 x} + \tan y$$

ניחוש – ננסה להפעיל משפט לגראנז' על $\tan(x)$ בקטע $[y, x]$

(במקרה בו $x = y$ ברור שאי השיוויון מתקיים.)

לפי לגראנז' קיימת נקודה $x < c < y$ עבורה

$$\frac{1}{\cos^2(c)} = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{x - y}$$

האם זה קשור לאי השיוויון? נראה שכן

cos בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$ היא חיובית ויורדת.

לכן גם $\cos^2$ בתחום זה חיובית ויורדת

ולכן $\frac{1}{\cos^2}$ חיובית ועולה.

כיוון ש $x < c < y$ (והכל בתחום) נובע כי

$$\frac{1}{\cos^2(y)} < \frac{1}{\cos^2(c)} < \frac{1}{\cos^2(x)}$$

וביחד

$$\frac{1}{\cos^2(y)} < \frac{\tan(x) - \tan(y)}{x - y} < \frac{1}{\cos^2(x)}$$

ולכן

$$\frac{x-y}{\cos^2(y)} < \tan(x) - \tan(y) < \frac{x-y}{\cos^2(x)}$$

ולכן

$$\frac{x-y}{\cos^2(y)} + \tan(y) < \tan(x) < \frac{x-y}{\cos^2(x)} + \tan(y)$$

2. נגדיר סדרה $\{a_n\}$ באופן הבא – $a_1 = 2$, ולכל n טבעי: $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4}$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

שאלה מספר 7 בקישור הבא.

3. (א) (12 נק') עבור אלו ערכים של $t > 0$ הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} t^{\ln n}$ מתכנס?

(ב) (13 נק') עבור אלו ערכים של $t > 0$ הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} t^{\sqrt{n}}$ מתכנס?

תרגילים 9 ו10 בקישור הבא.

(א) (12 נק') תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל הממשיים המקיימת:

$f(1) = 1$. אזי, קיימת $c \in \mathbb{R}$ עבורה: $f(c) = -\ln c$.

$$h(x) = f(x) + \ln(x)$$

נציב $x = 1$ ונקבל כי

$$h(1) = f(1) + \ln(1) = 1$$

אי אפשר להציב את נקודת קצה התחום 0, מה עושים באינפי כשאי אפשר להציב? מחשבים גבול!

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) + \ln(x) = \{f(0) - \infty\} = -\infty$$

לכן קיימת נקודה כלשהי $d > 0$ עבורה $h(d) < 0$ ולכן בקטע שבין $d, 1$ לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה c בה

$$h(c) = 0$$

בדיוק כמו שרצינו.

(שימו לב שh רציפה כצירוף רציפות).

(ב) (13 נק') תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בכל הממשיים המקיימת: $f'(x)>1$ לכל $x\in\mathbb{R}$, יהי $a_1\in\mathbb{R}$ ונגדיר סדרה ע"י: $a_{n+1}=f(a_n)$ לכל n. אזי, $|a_n|\to\infty$.

מהנתונים ניתן להעביר אגף ולבנות פונקציה

$$h(x)=f(x)-x$$

עליה אנחנו יודעים ש

$$h'(x)>0$$

אם $h>0$ אז

$$f(a_n)>a_n$$

האם העובדה שהפונקציה עולה, גוררת שהיא בהכרח חיובית?

למעשה, המצב הפשוט אך מעניין הוא ש $h(x)=0$ כלומר $f(x)=x$

כי במקרה זה, אם נבחר $a_n=x$ נקבל כי

$$a_{n+1}=f(a_n)=a_n$$

ואז מקבלים סדרה קבועה שלא שואפת לאינסוף!

לכן נבנה הפרכה:

$$f(x)=2x$$

$$f'(x)=2>1$$

$$a_{n+1}=f(a_n)=2a_n$$

אם $a_1=0$ נקבל את הסדרה הקבועה $a_n=0$ שכמובן אינה שואפת לאינסוף.