תרגיל בית 10 אינפי 3

1. הוכיחו כי המשוואות הבאות מגדירות את z כפונקציה של x, y בסביבת הנקודה $a = (a_1, a_2, a_3)$ וחשב את $z_x(a_1, a_2), z_y(a_1, a_2), z_{xy}(a_1, a_2)$.

(א)

$$F(x, y, z) = y^2 + xy + z^2 - e^z - 4 = 0$$

$$a = (0, e, 2)$$

(ב)

$$xz + y \ln z + x^2 = 0$$

$$a = (-2, 0, 2)$$

2. נתונה משוואה $\sqrt{x^2 + y^5 + \cos z - 1} = z^4 + 1$.

(א) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את x כפונקציה של y, z?

(ב) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את y כפונקציה של x, z?

(ג) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את z כפונקציה של x, y?

3. נניח כי המשוואה $F(x, y, z) = 0$ מקיימת את תנאי הפונקציה הסתומה לפי כל אחד מן המשתנים בנקודה $a = (a_1, a_2, a_3)$ ולכן מגדירה פונקציות

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z), \quad z = z(x, y)$$

מצאו את (המספר)

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2, a_3) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}(a_1, a_3) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(a_1, a_2)$$

4. (א) הוכיחו כי קיים כדור כלשהוא $B \subseteq \mathbb{R}^4$ שמרכזו ב $(2, 1, -1, -2)$ וקיימות פונקציות $u, v : B \to \mathbb{R}$ הגזירות ברציפות על B. כך ש

$$u(2, 1, -1, -2) = 4, \quad v(2, 1, -1, -2) = 3$$

ולכל נקודה $(x, y, z, w) \in B$ מתקיים

$$u^2 + v^2 + w^2 = 29, \quad \frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} = 17$$

(ב) מצאו את

$$u_x(2, 1, -1, -2), \quad v_x(2, 1, -1, -2), \quad u_z(2, 1, -1, -2), \quad v_z(2, 1, -1, -2)$$

5. תהי

$$f(x,y,z) = (e^x \sin z, e^y \cos z, e^z xy)$$

הוכח כי f הפיכה מקומית ב $(0,1,0)$ ומצא את מטריצת יעקובי של f^{-1} בנקודה $(0,e,0)$.

תרגילי רשות - אין צורך להגיש.

6. תהי פונקציה $F(x,y)$ המוגדרת על תחום D ובעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 2 בתחום D. נתונה נקודה $(x_0,y_0) \in D$ כך שמתקיים

$$F(x_0,y_0) = 0, \quad F_x(x_0,y_0) = 0, \quad F_y(x_0,y_0) \neq 0, \quad F_{xx}(x_0,y_0) \neq 0$$

הוכיחו כי $F(x,y) = 0$ אינה מגדירה את x כפונקציה של y בסביבת הנקודה (x_0,y_0).
(רמז: הוכיחו שהמשוואה מגדירה את y כפונקציה של x ומצא תכונות של פונקציה זו).

7. נתונה מערכת משוואות

$$f(x,u,v) = 0$$
$$g(y,u,v) = 0$$
$$h(z,u,v) = 0$$

עבור $a = (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \in \mathbb{R}^5$ נסמן

$$A_a = \begin{pmatrix} h_u(a_3,a_4,a_5) & h_v(a_3,a_4,a_5) \\ g_u(a_2,a_4,a_5) & g_v(a_2,a_4,a_5) \end{pmatrix}, \quad B_a = \begin{pmatrix} f_u(a_1,a_4,a_5) & f_v(a_1,a_4,a_5) \\ g_u(a_2,a_4,a_5) & g_v(a_2,a_4,a_5) \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי אם

$$|B_a| h_z(a_3,a_4,a_5) \neq 0$$

אז המערכת מגדירה את z כפונקציה של x,y בסביבת a ומתקיים

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2) = \frac{|A_a| f_x(a_1,a_4,a_5)}{|B_a| h_z(a_3,a_4,a_5)}$$

8. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(א) הוכיחו כי f דיפרנציאבילית בקטע הפתוח $(-1,1)$ וכי $f'(0) \neq 0$.

(ב) הוכיחו כי f אינה חד חד ערכית בכל קטע פתוח המכיל את 0. הצעה לפתרון: הוכיחו ראשית כי עבור כל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$f(\frac{2}{(4k+1)\pi}) > f(\frac{2}{(4k+3)\pi}) < f(\frac{2}{(4k+4)\pi})$$

(ג) איזה תנאי מתנאי משפט הפונקציה ההפוכה לא מתקיים כאן? (הרי מסקנת המשפט לא מתקיימת). בדקו בצורה מפורשת שהוא לא מתקיים.