פתרון שאלת אתגר 1 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

סמסטר א', תשע"ו

יהי $\mathbb{F}$ שדה. נסתכל על הקבוצה

$$\mathbb{F} \times \mathbb{F} = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{F}\}$$

ונגדיר עליה את הפעולות הבאות:

$$\begin{aligned}(a,b) \oplus (c,d) &= (a+c, b+d) \\ (a,b) \odot (c,d) &= (ac-bd, ad+bc)\end{aligned}$$

שאלה 1. בשאלה זו נבדוק האם קיבלנו שדה.

1. הוכיחו ש-$(\mathbb{F} \times \mathbb{F}, \oplus, \odot)$ מקיים את כל האקסיומות של שדה חוץ מקיום הופכיים.
2. הוכיחו: איבר $(a,b) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ הוא הפיך ב-$(\mathbb{F} \times \mathbb{F}, \oplus, \odot)$ אם ורק אם $a^2 + b^2 \neq 0_{\mathbb{F}}$.
3. הסיקו: $(\mathbb{F} \times \mathbb{F}, \oplus, \odot)$ הוא שדה אם ורק אם $\forall a \in \mathbb{F} : a^2 + 1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$. כלומר, אם ורק אם אין ל-$-1_{\mathbb{F}}$ שורש ב-$\mathbb{F}$.
4. הסיקו מהמסקנה: $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ הוא שדה (שנתעסק בו בשאלה 3), אבל $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, \oplus, \odot)$ הוא לא שדה.

הוכחה.

1. כדי להוכיח ש-$(\mathbb{F} \times \mathbb{F}, \oplus, \odot)$ שדה, צריך לבדוק את כל האקסיומות. לא נכתוב פה הכל במפורש, אבל נכתוב את ההסבר המרכזי:
   (א) סגירות לחיבור – נובעת מהסגירות לחיבור של $\mathbb{F}$.
   (ב) אסוציאטיביות החיבור – נובעת מאסוציאטיביות החיבור ב-$\mathbb{F}$.
   (ג) קומוטטיביות החיבור – נובעת מקומוטטיביות החיבור ב-$\mathbb{F}$.
   (ד) איבר אפס – איבר האפס הוא $(0_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}})$.
   (ה) איבר נגדי – האיבר הנגדי של (a,b) הוא $(-a,-b)$.
   (ו) סגירות לכפל – נובעת מהסגירות לכפל של $\mathbb{F}$.
   (ז) אסוציאטיביות הכפל – נובעת מאסוציאטיביות הכפל ב-$\mathbb{F}$.

(ח) קומוטטיביות הכפל – נובעת מקומוטטיביות הכפל ב-$\mathbb{F}$.

(ט) איבר יחידה – איבר היחידה הכפלי הוא $(1_{\mathbb{F}},0_{\mathbb{F}})$, כי

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{F}\times\mathbb{F}:(a,b)\odot(1_{\mathbb{F}},0_{\mathbb{F}})=(a\cdot 1_{\mathbb{F}}-b\cdot 0_{\mathbb{F}},a\cdot 0_{\mathbb{F}}+b\cdot 1_{\mathbb{F}})=(a,b)$$

וכנ"ל בכיוון ההפוך (כי יש קומוטטיביות).

(י) איבר הופכי – לא יודעים עוד...

(יא) חוק הפילוג – יהיו $(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{F}\times\mathbb{F}$. צריך לבדוק שמתקיים

$$(a,b)\odot((c,d)\oplus(e,f))=((a,b)\odot(c,d))\oplus((a,b)\odot(e,f))$$

נחשב כל אגף בפני עצמו: אגף שמאל הוא

$$\begin{aligned}(a,b)\odot((c,d)\oplus(e,f)) &= (a,b)\odot(c+e,d+f)=\\ &= (a\,(c+e)-b\,(d+f)\,,a\,(d+f)+b\,(c+e))=\\ &= (ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)\end{aligned}$$

ואילו אגף ימין הוא

$$\begin{aligned}((a,b)\odot(c,d))\oplus((a,b)\odot(e,f)) &= (ac-bd,ad+bc)\oplus(ae-bf,af+be)=\\ &= (ac-bd+ae-bf,ad+bc+af+be)\end{aligned}$$

ומקבלים ששני האגפים שווים (מקומוטטיביות החיבור ב-$\mathbb{F}$).

2. כעת, יהי $(a,b)\in\mathbb{F}\times\mathbb{F}$. צ"ל: (a,b) הפיך אם ורק אם $a^2+b^2\neq 0_{\mathbb{F}}$.
לצורך כך נסתכל על האיבר $(a,-b)\in\mathbb{F}\times\mathbb{F}$. נשים לב כי

$$(a,b)\odot(a,-b)=\left(a^2+b^2,-ab+ab\right)=\left(a^2+b^2,0_{\mathbb{F}}\right)$$

לכן:

(א) אם $a^2+b^2\neq 0_{\mathbb{F}}$, אזי

$$(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

(ב) אם $a^2+b^2=0_{\mathbb{F}}$, אזי (a,b) הוא מחלק אפס, ולכן אינו הפיך.

3. הכיוון $\boxed{\Leftarrow}$ ברור (כי כל איבר $(a,1)$ הוא הפיך, ולכן אפשר להשתמש בסעיף הקודם).
לגבי הכיוון $\boxed{\Rightarrow}$: לפי הסעיף הראשון, צ"ל שכל איבר $(a,b)\neq(0_{\mathbb{F}},0_{\mathbb{F}})$ הוא הפיך. נניח בשלילה שהוא לא הפיך; אזי, לפי הסעיף השני, $a^2+b^2=0_{\mathbb{F}}$. כיוון ש-$(a,b)\neq(0_{\mathbb{F}},0_{\mathbb{F}})$, אפשר להניח בה"כ כי $a\neq 0_{\mathbb{F}}$, ואז לחלק בו. נקבל $1_{\mathbb{F}}+\left(a^{-1}b\right)^2=0_{\mathbb{F}}$. לפי הנתון, אין פתרונות למשוואה הזו, בסתירה.

4. ב-$\mathbb{R}$ אין פתרונות למשוואה $x^2+1=0$, ולכן $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus,\odot)$ שדה; ב-$\mathbb{C}$, יש פתרון למשוואה הזו (כי $i^2+1=0$), ולכן $(\mathbb{C}\times\mathbb{C},\oplus,\odot)$ הוא לא שדה.

$\square$

שאלה 2. הוכיחו: ב-$\mathbb{F}\times\mathbb{F}$ קיים איבר (a,b) המקיים $(a,b)^2+1_{\mathbb{F}\times\mathbb{F}}=0_{\mathbb{F}\times\mathbb{F}}$. במילים אחרות, (a,b) הזה הוא "שורש" של $-1_{\mathbb{F}\times\mathbb{F}}$.

הוכחה. נסתכל על האיבר $(0_{\mathbb{F}},1_{\mathbb{F}})$. מתקיים:

$$(0_{\mathbb{F}},1_{\mathbb{F}})^2+1_{\mathbb{F}\times\mathbb{F}}=(0_{\mathbb{F}}-1_{\mathbb{F}},0_{\mathbb{F}})+(1_{\mathbb{F}},0_{\mathbb{F}})=(0_{\mathbb{F}},0_{\mathbb{F}})=0_{\mathbb{F}\times\mathbb{F}}$$

כדרוש. $\square$

שאלה 3. נניח כי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. הסבירו מדוע הבנייה הזו נותנת לנו שדה זהה ל-$\mathbb{C}$.

פתרון. נתאים לזוג (a,b) את המספר המרוכב $a+bi$ (כלומר, הגדרנו פונקציה $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ שעבורה $f\left((a,b)\right)=a+bi$). נסמן את ההתאמה הזו $(a,b)\mapsto a+bi$. נבדוק שההתאמה הזו מכבדת את הפעולות שלנו, כלומר:

1. נבדוק כי $(a,b)\oplus(c,d)$ יותאם ל-$(a+bi)+(c+di)$. אכן,

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)\mapsto(a+c)+(b+d)\,i=(a+bi)+(c+di)$$

2. נבדוק כי $(a,b)\odot(c,d)$ יותאם ל-$(a+bi)\cdot(c+di)$. אכן,

$$(a,b)\odot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)\mapsto(ac-bd)+(ad+bc)\,i=(a+bi)\cdot(c+di)$$

עוד נשים לב שאם יש לנו שני איברים שונים $(a,b)\neq(c,d)$, התאמנו להם מספרים מרוכבים שונים ("הפונקציה חד-חד ערכית"); וגם לכל מספר מרוכב יש זוג שמותאם אליו ("הפונקציה על"). לכן, קיבלנו שדה שממש זהה ל-$\mathbb{C}$ – יש לנו התאמה חד-חד ערכית ועל בין האיברים של השדות, שמכבדת את הפעולות. להתאמה כזו קוראים **איזומורפיזם של שדות**.