הגדרה 1: פונק' $F(x)$ נקראת פונקציה קדומה לפונק'
$f(x)$ בתחום D, אם לכל x בתחום D מתקיים

$$F'(x) = f(x)$$

הגדרה 2: אם ל $f(x)$ קיימת פונק' קדומה $F(x)$. אוסף
כל הפונק' הקדומות $F(x)+C$ של $f(x)$ (נקרא)
האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$ ומסומן ע"י:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

מטרה: למצוא פונק' $F(x)$ כך ש $F'(x) = f(x)$

~~תכונות~~:

תכונות לינאריות:

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

טבלת אינטגרלים:

$$\int 5x^2 + 2x + 1\,dx = 5\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x + c$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \cot x + c$$

שיטות אינטגרציה

1) אינטגרציה בחלקים:

לפי כלל גזירה של מכפלה (זכור):

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

$$\Downarrow$$

$$f\cdot g + c = \int (f\cdot g)'\,dx = \int f'\cdot g\,dx + \int f\cdot g'\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int (f'\cdot g)\,dx = f\cdot g - \int (f\cdot g')\,dx + C$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

(מניחים ש- f,g הן גזירות ברציפות, על מנת שמבטיח את קיום של פונק' קדומה.

הסבר על השיטה:

אינטגרציה בחלקים ממירה את בע"ית החישוב של $\int f'g$ בבע"ית החישוב של $\int f\cdot g'$. על מנת להשתמש בשיטה זו יש תחילה לזהות ביטוי של מכפלה כפונקציות. ברגע שזיהינו כפונקציות מכפלה $f'\cdot g$, אינטגרציה בחלקים תהיה כדאית במקרה ש- $\int f\cdot g'$ קל יותר, זה קורה בעיקר כאשר האיבר g נהיה פשוט יותר לאחר גזירה

דוגמאות:

1) נחשב את: $\int x\ln x\,dx$

$\cancel{f'=x}$

$dv = x\,dx \qquad u = \ln x$

$\Downarrow$

$v = \frac{x^2}{2} \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$u = x \qquad dv = \ln x\,dx$

$du = 1 \qquad v = x\ln x - x$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$$

~~דוגמא~~ האיבר שהולך באינטגרל "מורכב" על פולינום
מפני שהוא אפשר לגזור את הפולינום
עד להוריד את מעלתו. פונקציה זו ועולה
במידה והאיבר האחר הינו כזה שפונקצי'
הנגזרת שלו היא מתנהגת מחזורית, כמו למשל
של $e^x, \sin x, \cos x$.

<u>דוגמא 2:</u>

$$\int x \cdot e^x \, dx$$

$u = x \qquad dv = e^x dx$

$du = 1 \cdot dx \qquad v = e^x$

$u = e^x \qquad dv = x\,dx$

$du = e^x dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

~~דוגמא 3:~~

~~$\int x \arctan(x)\,dx =$~~

~~$u = x \qquad dv = \arctan(x)\,dx$~~

~~$du = x \cdot dx \qquad v =$~~

לפעמים צריך לעשות אינטגרציה בחלקים
רבה פעמים:

<u>דוגמא 3</u> (חשב את

$$\int x^2 \cos(x)\,dx$$

פתרון:

$u = x^2 \qquad dv = \cos(x)\,dx$

$du = 2x \qquad v = \sin x$

$$\int x^2 \cos(x)\,dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx =$$

$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = 1 \cdot dx \qquad v = -\cos x$

$$= x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x + \sin x + C$$

<u>שאלה 4</u> (נתון) חלק א:

$$\int x(\ln x)^2\,dx$$

$dv = x\,dx \qquad u = (\ln x)^2$ <u>פתרון:</u>

$v = \frac{x^2}{2} \qquad du = \frac{2\ln x}{x}$

$$\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int x\ln x =$$

$u = \ln x \quad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx \quad v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}}\,dx\right) =$$

$$= \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C$$

מצאנו לאחר כיצד האינטגרל מ הקודם
מה שמצאנו אנו מחפשים בחלקים המגדל את
החלקי שאנו רוצים (הדבר הזה מאוד קשור
לתרגיל במרחבה הם כמו ההרגל שחלוריג
את פעולת הכלל, כמו האינטגרל (פונקציה)

<u>שאלה 5</u>

(נתון):

$$\int e^x \sin(x)\,dx$$

$dv = e^x dx \qquad u = \sin(x)$ <u>פתרון:</u>

$v = e^x \qquad du = \cos x\,dx$

$$\int e^x\sin(x)\,dx = e^x\sin(x) - \int e^x\cos x\,dx =$$

$dv = e^x dx \qquad u = \cos x$

$$= e^x\sin(x) - \left(e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx\right) = \qquad v = e^x \qquad du = -\sin x\,dx$$

$$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx$$

$$2\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x \quad /:2$$

תרגיל חשבו את האינטגרלים הבאים:

1.

$$\int \ln x \, dx$$

פתרון

$$1 \cdot \ln x$$

$dv = 1 \cdot dx \qquad u = \ln x$

$v = x \qquad du = \frac{1}{x} dx$

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 \cdot dx =$$
$$= x\ln x - x + C$$

2.

$$\int \arctan x \, dx$$

פתרון

$dv = 1 \cdot dx \qquad u = \arctan x$

$v = x \qquad du = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} \qquad \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx + C$$

פתרנו [illegible]

3.

$$\int x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int x \sin 2x \, dx =$$

$u = x \qquad dv = \sin 2x \, dx$

$du = 1 dx \qquad v = -\frac{\cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[-x\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}\right] + C$$

4.

$$\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx = \int x(\ln(1-x) - \ln(1+x)) dx =$$
$$= \int x \ln(1-x) dx - \int x \ln(1+x) dx$$

$u = \ln(1-x) \qquad dv = x\,dx$

$du = -\frac{1}{1-x} \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$\int \frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \int \frac{x^2 - 1 + 1}{2(1-x)} dx$$
$$-\left[\int \frac{x+1}{2} - \frac{1}{2(1-x)}\right] = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \ln(1-x)$$

$$\int x \ln(1+x)\,dx = \frac{x^2\ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}\,dx =$$

$dv = x\,dx \qquad u = \ln(1+x)$

$v = \frac{x^2}{2} \qquad du = \frac{1}{1+x}\,dx$

$$= \frac{x^2\ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x} = \frac{x^2\ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{1+x} + \frac{1}{1+x} =$$

$$= \frac{x^2\ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2}\int (x-1)\,dx - \frac{1}{2}\ln(1+x) + c =$$

$$= \frac{x^2\ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x\right] - \frac{1}{2}\ln(1+x)$$

$$\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) =$$

אינטגרציה בשיטת ההצבה (שינוי משתנה)

1) הצבה ישירה:

$t = \varphi(x)$

$dt = \varphi'(x)\,dx$

$$\int_{(\varphi(x))} f(t)\,dt = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))$$

דוגמה:

$$\int \overbrace{\sin^2(x)}^{f\circ\varphi(x)}\ \overbrace{\cos(x)\,dx}^{\varphi'(x)\,dx} =$$

$f(x) = x^2 \qquad \varphi = \sin x \qquad \varphi'(x)\,dx = \cos x\,dx$

$t = \sin x \qquad dt = \cos x\,dx$

$$= \int t^2\,dt = \frac{t^3}{2} + c = \frac{\sin^3 x}{2} + c$$

דוגמה:

$$\int 2x\cdot \overbrace{e^{x^2}}^{f}\,dx = \int \overbrace{e^{x^2}}^{f\circ\varphi(x)}\ \overbrace{2x\,dx}^{dx} = \int e^t\,dt = e^t + c =$$

$f = e^x \qquad \varphi(x) = x^2 \qquad \varphi'(x) = 2x \qquad\qquad = e^{x^2} + c$

$t = x^2 \qquad dt = 2x\,dt$

עוד דוגמא:

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$$

נקח $t^2=9-x^2$ כלומר

$t\,dt=-x\,dx$

נציב באינטגרל ונקבל:

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\int x^2\sqrt{9-x^2}\,x\,dx=\int(9-t^2)t(-t\,dt)=$$

$$=-\int 9t^2dt+\int t^4dt=-3t^3+\frac{1}{5}t^5+c=$$

$$=-3\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^5+c$$

דוגמא:

$$\int\frac{e^x\,dx}{e^x+e^{\frac{x}{2}}}=\int\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}dx=2\int\frac{1}{t}\,dt=2\ln|t|+c=$$

$t=e^{\frac{x}{2}}+1$

$dt=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}dx$

$$=2\ln\left|e^{\frac{x}{2}}+1\right|+c$$

דוגמא:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-3}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}+c=\sqrt{2x-3}+c$$

$t=2x-3$

$dt=2\,dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$

2) משפט ההצבה — הוכחה:

אם נגזור לפי כלל השרשרת:

$$\int f(x)\,dx$$

ואמרנו הרי למצוא הכלל $\varphi(t)=x$ הוא הפיך

אם האינטגרל שווה לפי כלל השרשרת:

$$F=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

תרגיל:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}+1}\,dx$$

פתרון: נציב: $x=t^2 \Rightarrow t=\sqrt{x}$

$dx=2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^3+1}\cdot 2\cdot t\,dt = \int \frac{2t^2}{t^3+1}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{2}{3}\ln|u|+c = \qquad u=t^3+1 \Rightarrow du=3t^2\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\ln|t^3+1|+c = \frac{2}{3}\ln|x^{\frac{3}{2}}+1|+c$$

תרגיל:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$$

$t=\sqrt[6]{x} \Leftarrow x=t^6 \qquad dx=6t^5\,dt$

$$\int \frac{6\cdot t^5\,dt}{t^3(1+t^2)} = \int \frac{6t^2\,dt}{1+t^2} = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} =$$

$$= 6\left[\int 1 - \int \frac{1}{1+t^2}\right] = 6\left[t - \arctan t + c\right] =$$

$$= 6\left[\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}\right] + c$$

תרגיל:

$$\int x\sqrt[6]{2x+3}\,dx$$

$$2x+3=t^6 \Rightarrow x=\frac{t^6-3}{2}$$

$$dx=3t^5\,dt$$

$$\int x\sqrt[6]{2x+3}\,dx = \int \frac{t^6-3}{2}\cdot t\cdot 3t^5\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int (t^6-3)t^6 = \frac{3}{2}\int (t^{12}-3t^6)\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{t^{13}}{13} - \frac{1}{2}\frac{t^7}{7} + c = \frac{3}{26}t^{13} - \frac{1}{14}t^7 + c$$

שאלה:

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} \qquad \alpha \neq 1$$

פתרון:

$$t = \ln x \quad \Leftarrow \quad x = e^{t}$$

$$dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{t^{\alpha}} \cdot dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{(\ln x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$