תורת הקבוצות — תרגיל בית 7
פתרונות

חיים שרגא רוזנר

ט"ז בסיון, תשע"ה*

תקציר

אקסיומות.

רשימת האקסיומות

1. אקסיומות ראשוניות

אקסיומת הקיום
(א) קיימת קבוצה.

אקסיומת ההיקפיות
(ב) קבוצות נקבעות על ידי איבריהן. לשון אחר: $x = y$ א.ס.ס. לכל z מתקיים $z \in x \leftrightarrow z \in y$.

סכמת אקסיומות ההפרדה
(ג) אם A קבוצה, ו־φ תכונה, אזי אוסף האיברים ב־A המקיימים את התכונה φ הוא קבוצה. לשון אחר: תהי $\varphi(x, y)$ נוסחה (אולי עם עוד פרמטרים) ותהי A קבוצה. אזי האוסף $\{x \in A \colon \varphi(x, A)\}$ הוא קבוצה.

2. אקסיומות בנייה: הזוגות, האיחוד, ההחלפה, החזקה

אקסיומת הזוגות
(א) תהיינה x, y קבוצות. אזי האוסף $\{x, y\}$ הוא קבוצה.

אקסיומת האיחוד
(ב) תהי $\mathcal{F}$ קבוצה. אזי $\bigcup \mathcal{F} = \{x \colon \exists y, x \in y \wedge y \in \mathcal{F}\}$ היא קבוצה.

סכמת אקסיומות ההחלפה
(ג) תהי A קבוצה, ותהי $\varphi(x, y)$ נוסחה, אשר היא כלל התאמה חד־ערכי על איברי A. לשון אחר, לכל $x \in A$ קיים ויחיד y כך ש־$\varphi(x, y)$. אזי האוסף $\{y \colon \exists x \in A, \varphi(x, y)\}$ של תמונת φ הוא קבוצה.

אקסיומת קבוצת החזקה
(ד) תהי A קבוצה. אזי האוסף $\mathcal{P}(A) = \{x \subseteq A\}$ הוא קבוצה.

3. אקסיומת היסודיות

אקסיומת היסודיות
(א) לכל קבוצה לא ריקה A קיים איבר מינימלי ליחס השייכות.
לשון אחר: בכל קבוצה לא ריקה A קיים איבר $a \in A$ כך שאין איבר $b \in A$ המקיים $b \in a$.
בניסוח פורמלי:

$$\forall A \left[A = \varnothing \vee \exists a \in A \forall b \in A \left(b \notin a\right)\right]$$

* להגשה עד יום **חמישי** י"ז בסיון (4 יוני) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

4. אקסיומות נוספות

אקסיומת האינסוף (א) קיימת קבוצה I כך ש־$\emptyset \in I$ וכן לכל $a \in I$ גם $S(a) = a \cup \{a\} \in I$.

אקסיומת הבחירה (ב) לכל קבוצה $\mathcal{F}$ של קבוצות לא ריקות, יש פונקציית בחירה על $\mathcal{F}$, כלומר פונקציה $f\colon \mathcal{F} \to \bigcup(\mathcal{F})$ המקיימת: לכל $A \in \mathcal{F}$, $f(A) \in A$.

תזכורות

1. בעזרת שלוש האקסיומות מסעיף 1 ניתן להראות כי קיימת הקבוצה הריקה $\varnothing$, והיא יחידה.

2. **זוג סדור** $\langle a, b\rangle$ הוא הקבוצה $\langle a, b\rangle = \{a, \{a, b\}\}$. לזוג זה התכונה $\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle$ א.ס.ס. $a_1 = a_2$ וכן $b_1 = b_2$. הזוג הסדור מוגדר בעזרת שימוש חוזר באקסיומת הזוגות.

1 מערכת אקסיומות ZFC

אנו מציגים מערכת אקסיומות, ובעזרתן מגדירים את המושג קבוצה. אם הצלחנו לתאר אובייקט כלשהו שאיננו מקיים את אחת האקסיומות האלו, הרי שנאמר שאובייקט זה איננו קבוצה.

1.1 אקסיומת הקיום, אקסיומת ההיקפיות וסכמת ההפרדה

1. תהיינה A, B קבוצות. הראו כי האוסף הבא הוא קבוצה:

$$A \setminus B = \{x\colon x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

השתמשו רק באקסיומות שבכותרת הסעיף.

פתרון ננסח את התכונה המתאימה $\varphi(x, A, B) = [x \in A \wedge \neg x \in B]$. אזי לפי סכמת ההפרדה $\{x \in A\colon \varphi(x, A, B)\}$ הוא קבוצה. ■

2. מצאו את הסתירה בדרך ההוכחה הבאה, הוכחה שכל הקבוצות הקיימות הן ריקות.

תהי $A \neq \varnothing$ קבוצה, ונגדיר תת־קבוצה B של A על ידי $B = \{x \in A\colon x \notin B\}$. קבוצה זו הוגדרה בעזרת סכמת ההפרדה, כאשר הנוסחא φ היא $\neg x \in B$. מכיוון ש־A לא ריקה, ניתן לבחור $a \in A$ כלשהו. נבדוק האם $a \in B$ או לא. נניח $a \in B$. אזי מהגדרת B אנו יודעים כי $a \notin B$, וזו סתירה. מנגד, אם $a \notin B$ אז a מקיים את הדרוש מאיברי B, ולכם $a \in B$, וגם זו סתירה. מצאנו, אם כן כי כל האפשרויות לענות לשאלה "האם a הוא איבר של B?" אינן נכונות, וכך מצאנו סתירה להנחה בשלילה כי קיימת $A \neq \varnothing$. המסקנה העולה היא כי כל קבוצה היא ריקה. לפי אקסיומת ההיקפיות ניתן לקבוע כי יש רק קבוצה אחת, והיא הקבוצה הריקה. $\otimes$

פתרון בהוכחה לעיל עשינו שימוש בנוסחא $\varphi = [\neg x \in B]$. אולם בנוסחא זו יש פרמטר שאיננו קבוצה מוגדרת, הוא הפרמטר B, אותו אנו מנסים להגדיר באמצעות נוסחא זו. אם כן יש כאן מעגליות בנוסחא. ■

3. תהי A קבוצה ותהי $\varphi(x)$ נוסחא. הוכיחו את קיום הקבוצות

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in A \colon \varphi(x)\} \\ A_2 &= \{x \in A \colon \neg\varphi(x)\} \end{aligned}$$

הראו כי לכל איבר a ב־A מתקיים בדיוק אחד מהשניים:

- $a \in A_1$,
- $a \in A_2$.

הסיקו כי על ידי ההפרדה ניתן להפריד את A לשתי קבוצות זרות, זו שמקיימת את φ וזו שאינה מקיימת את φ.

פתרון יהי $a \in A$ נתון. נתבונן בפסוק $\varphi(a)$. לפסוק זה יש שני ערכים אפשריים: אמת או שקר. נבדוק כל אחד מהם בנפרד.

- $\varphi(a)$ אמת. אז מתקיים $a \in A_1$, $a \notin A_2$.
- $\varphi(a)$ שקר. אז מתקיים $a \notin A_1$, $a \in A_2$. ■

1.2 אקסיומות בנייה: הזוגות, האיחוד, ההחלפה, החזקה.

1. נביט בנסיון אחר להגדיר את הזוג הסדור. ננסה להגדיר $\langle a, b\rangle = \{a, \{b\}\}$. בעזרת הגדרה נסיונית זו, מצאו דוגמא נגדית לתכונה $\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle$ א.ס.ס. $a_1 = a_2$ וכן $b_1 = b_2$.

פתרון לפי ההגדרה הנסיונית שלנו, נקבל

$$\langle \{a\}, \{a\}\rangle = \{\{a\}, \{\{a\}\}\} = \langle \{\{a\}\}, a\rangle$$

התכונה שביקשנו איננה מתקיימת כאן. ■

2. נסחו, בשפת הנוסחאות של תורת הקבוצות, את אקסיומת הזוגות.

פתרון יש כמה דרכים. נציג אחת לדוגמא:

$$\forall x \forall y \exists z \left(x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \left((w \in z) \leftrightarrow (w = x \vee w = y)\right)\right)$$

■

תרגיל פתור

3. בנו קבוצה בת 3 איברים תוך הסתייעות באקסיומות מסעיף 1 ובאקסיומות הזוגות והאיחוד.

פתרון דרך ההיסק נתונה בטבלה. אנו משתמשים כאן חזור והשתמש באקסיומת הזוגות, וכן בתזכורת 1 ובאקסיומת האיחוד.

מספר צעד	תוצאה	נימוק
1	$\varnothing$	תזכורת **1**
2	$\{\varnothing\}$	זיווג של 1 עם 1.
3	$\{\{\varnothing\}\}$	זיווג של 2 עם 2.
4	$\{\{\{\varnothing\}\}\}$	זיווג של 3 עם 3.
5	$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$	זיווג של 1 עם 2.
6	$\{\{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$	זיווג של 4 עם 5.
7	$\{\{\{\varnothing\}\}, \varnothing, \{\varnothing\}\}$	איחוד של 6.

מצאנו, אם כן, כי קיימת הקבוצה $\{\{\{\varnothing\}\}, \varnothing, \{\varnothing\}\}$. בקבוצה זו יש שלושה איברים שונים, כנדרש. ■

4. בנו קבוצה בת 4 איברים. מותר להשתמש באותן האקסיומות מהתרגיל הקודם, ומומלץ להמשיך את המספור ממנו.

פתרון נמשיך את הספירה מהפתרון הסמוך.

מספר צעד	תוצאה	נימוק
8	$\{\{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	זיווג של 7 עם 7
9	$\{\{\{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	זיווג של 7 עם 8.
10	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	איחוד של 9.

בשלב 10 מצאנו קבוצה בת ארבעה איברים, כמבוקש. ■

5. בנו, בדרך מהירה ככל האפשר, קבוצה בת 128 איברים. בנו, בדרך מהירה ככל האפשר, קבוצה בת 127 איברים. אין להשתמש באקסיומת האינסוף.

פתרון

מספר צעד	קבוצה	מספר איברים	נימוק לקיומה של הקבוצה
1	$X_1 = \emptyset$	0	תזכורת **1**
2	$X_2 = \mathcal{P}(X_1) = \mathcal{P}(\emptyset)$	$2^0 = 1$	
3	$X_3 = \mathcal{P}(X_2) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$	$2^1 = 2$	
4	$X_4 = \mathcal{P}(X_3) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$	$2^2 = 4$	
5	$X_5 = \mathcal{P}(X_4) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$	$2^4 = 16$	
6	$X_6 = \{x \in X_5 \colon \emptyset \notin x \land \emptyset \neq x\}$	$16 \div 2 - 1 = 7$	הפרדה מ־5 באמצעות נוסחא.
7	$X_7 = \mathcal{P}(X_6)$	$2^7 = 128$	
8	$X_8 = \{x \in X_7 \colon x \neq \emptyset\}$	$128 - 1 = 127$	הפרדה מ־7 באמצעות נוסחא.

השתמשנו בכך שעבור X סופית, $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. בשלבים 6 ו־8 הפרדנו באמצעות נוסחא. יש להסביר את החשבון שהביאנו למספר האיברים המתאים. ובכן, לכל איברי $\mathcal{P}(X_4)$ מתחלקים לשני סוגים: אלו המכילים את הקבוצה הריקה ואלו שאינם. קל לייצר התאמה חח"ע ועל ביניהם, על ידי $x \mapsto \bigcup\{x, \{\emptyset\}\}$. לכן התנאי $\emptyset \notin x$ מחלק את העוצמה בשניים. בין 8 (או 128) האיברים הנותרים, הורדנו איבר ספציפי, את $\emptyset$. ■

6. תהי A קבוצה. הראו כי $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$.

פתרון בעזרת הכלה דו־כיוונית.

($\subseteq$). נניח $x \in \bigcup \mathcal{P}(A)$. אזי קיימת קבוצה y כך ש־$x \in y \in \mathcal{P}(A)$. מצאנו $y \in \mathcal{P}(A)$ ולכן $y \subseteq A$. בסך הכל $x \in A$.

($\supseteq$). נניח $x \in A$. מתקיים $A \in \mathcal{P}(A)$, ולכן $x \in A \in \mathcal{P}(A)$. מהגדרת איחוד $x \in \bigcup \mathcal{P}(A)$. ■

1.3 אקסיומת היסודיות

1. הראו, לכל אחת מהקבוצות הבאות, כי הן מקיימות את אקסיומת היסודיות:

(א) $\varnothing$.

(ב) $\{\varnothing\}$.

(ג) $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

שימו לב! נתבקשתם להוכיח כי האקסיומה מתקיימת עבור הקבוצות האלו, אין צורך להראות כי כל האיברים מקיימים את האקסיומה.

פתרון

(א) באופן ריק, כי האקסיומה טוענת רק על קבוצות לא ריקות.

(ב) ניקח $a = \varnothing \in \{\varnothing\}$, ובאמת לכל $b \notin \{\varnothing\}$ מתקיים $b \notin \varnothing = a$.

(ג) ניקח $a = \{\varnothing\}$, ובאמת לכל b בקבוצה הנתונה, $b \neq \varnothing$, ולכן $b \notin \{\varnothing\} = a$. ■

2. האם תיתכן הקבוצה $\{A_0, A_1, A_2, \dots, A_i, \dots : i \in \omega\}$ כך שלכל $i \in \omega$ מתקיים $A_{i+1} \in A_i$?

פתרון לא. לפי אקסיומת היסודיות, קיים $x \in A$ כך שלכל $y \in A$, $y \notin x$. אם כן, יהי x זה נתון. אזי הוא שווה ל־A_i, עבור i מסוים. כעת, $A_{i+1} \in A$ איננו מקיים $\neg(A_{i+1} \notin A_i)$, ובסתירה לאקסיומת היסודיות. אי לכך, קבוצה זו אינה מקיימת את אקסיומת היסודיות ואיננה קיימת במערכת ZFC. ■

3. הוכיחו, בעזרת אקסיומת היסודיות, כי לא קיימת קבוצת כל הקבוצות V. שימו לב להבדל בין הוכחה זו לבין הפרדוקס של ראסל.

פתרון נניח בשלילה קיום V. אזי לפי אקסיומת הזוגות קיימת $\{V\}$. נפעיל על קבוצה זו את אקסיומת היסודיות, ונקבל כי $a = V$, אבל גם $b = V$, כי זו קבוצה עם איבר יחיד, ומתקיים $a = V \in V = b$. אם כן, מצאנו כאן סתירה לאקסיומת היסודיות, ולכן לא קיימת הקבוצה V. ■

ב ה צ ל ח ה!