הרצאה 11

נכתב על ידי נועם יערי

תזכורת – התפלגויות

0. אחידה - $u\ [1,n]$ (לדוגמה קובייה כללית הוגנת).
1. ברנולי - $b(p)$ ניסוי $0/1$ (מצליח או לא). תוחלת p, שונות pq. $E(X)=P(X=1)$
2. בינומית - $B(n,p)$ מספר ההצלחות בסדרה על נוסחת ברנולי. תוחלת np, שונות npq
3. פואסון - $Poi(\lambda)$ גבול של משתנים בינומיים $B(n,p)$ כאשר $n\to\infty$, $\lambda=np\in\mathbb{R}$.
   תוחלת, שונות: λ.
4. גאומטרית - $G(p)$, $X\geq 1$ – בהמשך ההרצאה
5. התפלגות "בינומית שלילית" – בהמשך ההרצאה

דוגמה

בעיית המזכירה המבולבלת. בוחרים תמורה אקראית σ.

$$X=\text{מספר נקודות השבת}=\{i|\sigma(i)=i\}$$

עקרון ההכלה וההדחה -

$$P(X=0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

משתנים מציינים:

$$E(X)=1$$

נחשב את השונות:

$x_i=1$ אם $\sigma(i)=i$, אחרת, 0. $x_i\sim b\left(\frac{1}{n}\right)$

לכן $X=\sum x_i$

$$V(X)=\sum_{n}V(x_i)+\sum_{i\neq j}Cov\ (x_i,x_j)$$

$$Cov(x_1,x_2)=E(x_1x_2)-E(x_1)E(x_2)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}$$

לכן

$$V(X)=\sum_{n}V(x_i)+\sum_{i\neq j}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}\right)=1$$

כלומר $X\sim Bin\left(n,\frac{1}{n}\right)\to Poi(1)$ בקירוב.

$$\Rightarrow P(X=k)\approx\frac{e^{-1}}{k!}$$

4. התפלגות גיאומטרית

$X\sim G(p)$ ("X מתפלג גאומטרית עם הפרמטר p").

$X =$ מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בהסתברות p עד להצלחה הראשונה

$X=1:\ \ 1,\ \ X=2:\ 01, X=3:\ 001,\cdots$

$\boldsymbol{P(X=n)=pq^{n-1}}$,

נבדוק שזו אכן התפלגות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} = p(1+q+q^2+\cdots) = p\cdot\frac{1}{1-q} = 1$$

התוחלת:

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1}n = p+2pq+3pq^2+\cdots$$

איך לחשב את זה? נגדיר:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

לכן,

$$E(X)=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

נרצה לחשב את השונות:

נחשב $E(X^2)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \overline{\quad}\,'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$E\big(X(X-1)\big)=\sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1}n(n-1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)\cdot q^{n-2}\right)\cdot pq = pq\cdot\frac{2}{p^3}=\frac{2q}{p^2}$$

$$\Rightarrow V(X)=E(X^2)-E(X)^2 = E\big(X(X-1)\big)+E(X)-E(X)^2=$$

$$=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{2q+p-1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

5. התפלגות בינומית שלילית

עושים ניסויי ברנולי בלתי תלויים עד להצלחה השנייה

טענה

ההתפלגות הגאומטרית חסרת זכרון : אם $X\sim G(p)$ אז לכל n,

$$X-n|\underbrace{X>n}_{\text{נכשלנו ב-}n\text{ הפעמים הראשונות}}\sim G(p)$$

הוכחה

יהי $k\geq 1$

$$P(X-n=k|X>n)=P(X=n+k|X>n)=\frac{P(X=n+k)}{P(X>n)}=$$

$$=\frac{pq^{n+k-1}}{\sum_{i=n+1}^{\infty}pq^{i-1}}=\frac{pq^{n+k-1}}{q^n}=pq^{k-1}$$

מסקנה

מספר הניסויים עד להצלחה השנייה שווה לסכום X_1,X_2 כאשר $X_1,X_2\sim G(p)$ בלתי תלויים.

הגדרה

משתנה מקרי Y מתפלג בינומית שלילית $Y\sim NB(l,p)$ (כלומר l הצלחות, הסתברות p).

$(Y=l,l+1,\cdots)$

הערה

לפי חוסר הזכרון, אם

$$X_1,X_2,\cdots,X_l\sim G(p)$$

אז

$$Y=X_1+\cdots+X_l\sim NB(l,p)$$

$$\Rightarrow E(Y)=\frac{l}{p},V(Y)=\frac{lq}{p^2}$$

$$P(Y=n)=\binom{n-1}{l-1}p^lq^{n-l}$$

6. התפלגות היפר גאומטרית

$X \sim H(n;a,b)$ אם $X =$ מספר הכדורים האדומים בבחירה של n כדורים ללא החזרה, מכבד שיש בו a אדומים ו $b -$ כחולים.

נחשב את פונקציית ההתפלגות:

$$P(X=k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} = \frac{a!\,b!\,n!\,(a+b-n)!}{k!\,(a-k)!\,(n-k)!\,(b-n+k)!\,(a+b)!}$$

$$0, n-b \le X \le a, n$$

$$E(X) = \sum_{\max(0,n-b)}^{\min(a,n)} \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} k$$

לא נחשב ישירות, נחפש טריק.

לפני כן:

נוודא שהסכום יוצא 1.

דוגמה:

הוצאת 4 כדורים (n) מתוך 10 אדומים (a) ו $3 -$ כחולים (b)

k	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{3}{3}}{\binom{13}{4}}$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{3}{2}}{\binom{13}{4}}$	$\frac{\binom{10}{3}\binom{3}{1}}{\binom{13}{4}}$	$\frac{\binom{10}{4}\binom{3}{0}}{\binom{13}{4}}$

הוכחה שתמיד $\sum(X=l)=1$

$$\sum_k \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

תרגיל: להמציא סיפור שמסכם $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ (רמז: בוחר בחירות עם צבע)

חישוב התוחלת

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{הכדור ה } - i \text{ אדום} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

$$X_i \sim b\left(\frac{a}{a+b}\right)$$

$$\Rightarrow E(X) = n \cdot \frac{a}{a+b}$$

חישוב השונות

$$V(X) =$$

$$= nV(X_1) + n(n-1)Cov(X_1, X_2)$$

$$Cov(X_i, X_j) = -\frac{ab}{n^2(n-1)}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$