

- מסובבים 2 סביבונים זהים. על הפאות של כל סביבון מסומנים המספרים $\{1,1,2,3\}$.
- א. נגדיר משתנה מקרי $X =$ סכום 2 הסיבובים. מצא את התפלגות X . ✓
 - ב. חשב את התוחלת והשונות של X . ✓
 - ג. נגדיר משתנה חדש: $Y = 4X - 17$. מצא את התוחלת והשונות של Y . ✓
 - ד. נגדיר משתנה חדש נוסף: $Z = (X - 5)^2$. מצא את התפלגות Z וחשב את השונות שלו. ✓

פתרון:

(א) הערכים האפשריים של X הם 2,3,4,5,6 והסתברויות נתונות בטבלה הבאה:

$\{\omega\}$	$\{(1,1)\}$	$\{(1,2),(2,1)\}$	$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$	$\{(2,3),(3,2)\}$	$\{(3,3)\}$
X	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	1/4	1/4	5/16	1/8	1/16

חישוב התאים:

$$P(X=2) = P(1) \cdot P(1) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

$$P(X=3) = P(1) \cdot P(2) + P(2) \cdot P(1) = 2 \cdot 1/2 \cdot 1/4 = 1/4$$

$$P(X=4) = P(1) \cdot P(3) + P(2) \cdot P(2) + P(3) \cdot P(1) = (1/2 \cdot 1/4) + (1/4 \cdot 1/4) + (1/4 \cdot 1/2) = 5/16$$

$$P(X=5) = P(2) \cdot P(3) + P(3) \cdot P(2) = 2 \cdot 1/4 \cdot 1/4 = 1/8$$

$$P(X=6) = P(3) \cdot P(3) = 1/4 \cdot 1/4 = 1/16$$

(נשים לב שסכום התאים הוא 1)

(ב) התוחלת של X :

$$E(X) = \sum_k k \cdot P(X=k) = 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/4 + 4 \cdot 5/16 + 5 \cdot 1/8 + 6 \cdot 1/16 = 3.5$$

נוסחת העבודה לשונות של X : $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

חישוב עזר -

$$E(X^2) = \sum_k k^2 \cdot P(X=k) = 2^2 \cdot 1/4 + 3^2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 5/16 + 5^2 \cdot 1/8 + 6^2 \cdot 1/16 = 13.625$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 13.625 - 3.5^2 = 1.375$$

ג. המ"מ Y הוא טרנספורמציה לינארית של המ"מ X, לכן
 $E(Y) = E(4X + 5) = 4 \cdot E(X) + 5 = 4 \cdot 3.5 - 17 = -3$
 $V(Y) = V(4X + 5) = 4^2 \cdot V(X) = 16 \cdot 1.375 = 22$

ד. נבנה את טבלת ההתפלגות של המשתנה Z (בהתייחס לטבלה המקורית):

X	2	3	4	5	6
P(X=k)	1/4	1/4	5/16	1/8	1/16
Z = (X - 5) ²	9	4	1	0	1

נשים לב ש-Z מקבל רק 4 ערכים: $Z = \{0, 1, 4, 9\}$, כלומר טבלת ההתפלגות שלו:

Z	0	1	4	9
Z = (X - 5) ²	1/8	6/16	1/4	1/4

נוסחת השונות של Z: $Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$. נחשב כ"א מהמרכיבים

$$E(Z) = \sum_k k \cdot P(X = Z) = 9 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 + 1 \cdot (5/16 + 1/16) + 0 \cdot 1/8 = 3.625$$

$$E(Z^2) = \sum_k k^2 \cdot P(X = Z) = 9^2 \cdot 1/4 + 4^2 \cdot 1/4 + 1^2 \cdot (5/16 + 1/16) + 0^2 \cdot 1/8 = 24.625$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = 24.625 - 3.625^2 = 17.734$$

11.489 ✓

שאלה 4

כד מכיל שמונה כדורים, מהם שלושה אדומים וחמישה כחולים. מוציאים מהכד כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. נגדיר מ"מ X הסופר את מס' הכדורים האדומים שהוצאו עד הוצאת כדור כחול ראשון. מצא את פונ' ההסתברות של X ואת פונ' ההתפלגות המצטברת שלו.

פתרון:

טבלת ההתפלגות המבוקשת להסתברות ולהתפלגות המצטברת:

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$
F(X)	$\frac{5}{8}$	$\frac{50}{56}$	$\frac{55}{56}$	1

חישוב התאים נעשה בעזרת הסתברויות מותנות (אפשר גם ע"י קומבינטוריקה אבל יותר מסורבל):
 נסמן את המאורעות "יצא כדור כחול (אדום) בהוצאה ה- j "

$$P(X=0) = P(B_1) = 5/8$$

$$P(X=1) = P(R_1)P(B_2 | R_1) = 3/8 \cdot 5/7 = 15/56$$

$$P(X=2) = P(R_1)P(R_2 | R_1)P(B_3 | R_2) = 3/8 \cdot 3/7 \cdot 5/6 = 5/56$$

$$P(X=3) = P(R_1)P(R_2 | R_1)P(R_3 | R_2)P(B_4 | R_3) = 3/8 \cdot 2/7 \cdot 1/6 \cdot 5/5 = 1/56$$