פתרון תרגיל 10

א) התכנסות של $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$ ב-$(0,1)$? במ"ש:

$$f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}=\frac{x}{n}\left[\ln x-\ln n\right]=\underbrace{\frac{x\ln x}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}-\underbrace{\frac{x\ln n}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

לכן גבול (נקודתי!) הוא אפס!

נחקור קצת את $f_n(x)$:

$$f_n'(x)=\frac{\ln x+1-\ln n}{n}\underset{\text{קיצוני!}}{<0}$$

לכן f_n יורדת.

קיים

$$\lim_{x\to0^+}f_n(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x\ln x}{n}\right)=\frac{1}{n}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\frac{1}{n}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=0$$

לכן, f_n יורדת, ולכן הסופרמום הוא באפס, ולכן:

$$\sup_{x\in(0,1)}|f_n(x)|=\inf_{(0,1)}|f_n(1)|=\left|\frac{1}{n}(\ln 1-\ln n)\right|=\frac{\ln n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ולכן התכנסות במ"ש!

ב) $f_n(x)=x\arctan(nx)$ ב-$(0,\infty)$?:

עבור x_0 בתחום קיים

$$\lim_{n\to\infty}x_0\arctan(nx_0)=\frac{\pi}{2}x_0$$

לכן $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\pi x}{2}$. (נבדוק במידה שווה:)

נראה כי $\sup_{x>0}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. ולכן התכנסות במ"ש!:

קיים: $f(x)-f_n(x)=x\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(nx)\right]>0$ לכל $x>0$. נחפש מינימום של $f-f_n$:

$$\left(f(x)-f_n(x)\right)'=\frac{\pi}{2}-\arctan(nx)+x\left[-\frac{n}{1+n^2x^2}\right]=\frac{\pi}{2}-\arctan(nx)-\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

- נגזור שוב:

$$\left(f(x)-f_n(x)\right)''=-\frac{n}{1+n^2x^2}-n\left[\frac{(1+n^2x^2)-x\cdot2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}\right]$$

$$=-\frac{n}{1+n^2x^2}-n\left[\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\right]=\frac{-n(1+n^2x^2)-n+n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}=\frac{-2n}{(1+n^2x^2)^2}\underline{\underline{<0}}$$

לכן $(f-f_n)''<0 \Longrightarrow (f-f_n)'$ פונקציה יורדת!

מתקיים:

* $(f(0)-f_n(0))' = \frac{\pi}{2}$

* $\lim_{x\to\infty}(f(x)-f_n(x))' = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan(nx) - \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$

לכן, $(f-f_n)'$ יורדת, $\begin{cases}(f-f_n)'(0)=\frac{\pi}{2}\\ \lim_{x\to\infty}(f-f_n)'(x)=0\end{cases}$

מכאן נסיק כי $(f-f_n)'(x)>0$ לכל $x>0$

(הסבר: אם y' רציפה ויורדת ב- $(0,\infty)$, $\begin{cases} y'(0)=\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x\to\infty} y'(x)=0\end{cases}$

אבל יש נקודה x_0 עבורה $y'(x_0)\le 0$ אז מכיוון ש- y' יורדת ממש

$y'(x_0+1)<y'(x_0)\le 0$, אך $\lim_{x\to\infty} y'(x)=0$ ולכן יש $M>\cancel{x_0}$ כך ש-

לכל $x>M$ $y'(x)>\frac{y'(x_0+1)}{2}$ אך בפרט עבור x כך ש- $x>x_0+1$

אז $y'(x)>\frac{y'(x_0+1)}{2}>y'(x_0+1)$ (נזכור $y'(x_0+1)<0$!), סתירה לכך ש- y' יורדת!)

מכיוון ש- $(f-f_n)'>0$ אז $(f-f_n)$ עולה! ומכאן ש-

$$\sup_{x>0}(f(x)-f_n(x)) = \lim_{x\to\infty}(f(x)-f_n(x)) = \lim_{x\to\infty} x\frac{\pi}{2} - x\arctan(nx) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(nx)\right]}{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\overset{L}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{n}{1+n^2x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^2}{1+n^2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x^2}+n^2} = \frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לכן $\sup_{x>0}|f(x)-f_n(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ולכן התכנסות במ"ש!

$n\ge 0$. $f_n(x)=\begin{cases}1; & [n,n+1]\\ 0; & \text{אחרת}\end{cases}$ ב 1

פיתרון:

. עבור $0\le x$ $f_n(x)=0$ ולכן $f(x)=0$ ל- $x\le 0$.

- עבור $x>0$ מארכימדס קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש- $x<n_0$ ולכן $f_{n_0}(x)=0$ ולכל $n>n_0$ קיים $f_n(x)=0 \Longrightarrow f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

. f_n לא מתכנסת במ"ש כי עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$, לכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $n>N$ וקיים $x_n=n+\frac{1}{2}$ כך ש- $|f_n(x_n)|\ge\frac{1}{2}$

---

2. $f_n(x)=\frac{[n f(x)]}{n}$ אחידות? ב- $[a,b]$.

פיתרון: קיים

$$f(x)-\frac{1}{n}=\frac{nf(x)-1}{n}\le\frac{[nf(x)]}{n}\le\frac{nf(x)}{n}=f(x)$$

ולכן $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$ לכל x!

קולט קיים (לפי סאן):

$$f(x)-\frac{1}{n}\le f_n(x)\le f(x)+\frac{1}{n}$$

$|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ לכל x בקטע

לכן מתכנסת במ"ש!

---

3. $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})$. להוכיח שמתכנסת במ"ש בכל קטע סופי על הישר.

שימו לב כי $f_n(x)$ הוא סכום רימן שמתאים ל- f בקטע $[x,x+1]$

ולכן $f_n(x)\longrightarrow\int_x^{x+1}f(t)dt$ כי נתון ש- f רציפה. לכן אינטגרבילית בכל קטע סופי!

נראה במ"ש: יהי $[a,b]$ קטע סגור. f רציפה ב- $[a,b+1]$

לכן רציפה בו במ"ש לכן אם נתון $\varepsilon>0$, אז קיים $\delta>0$ כך ש- $|x_1-x_2|<\delta$ נקודות ב- $[a,b+1]$ אזי $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

נשים לב שקיים:

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+(\frac{k+1}{n})}\underbrace{f(x+\frac{k}{n})}_{\text{מספר קבוע}}dt$$

אינו תלוי ב- t!

ולכן: מכיוון ש-

$$f(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt$$

לכן:

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}\left[f(x+\tfrac{k}{n})-f(t)\right]dt\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}\left|f(x+\tfrac{k}{n})-f(t)\right|dt$$

יהי נתון כעת $x\in[a,b]$ וכן n.

עבור $\varepsilon>0$ כלשהו שנתון, ו- $\delta>0$ כנ"ל קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{N_0}<\delta$

וכך לכל $n>N_0$: $\frac{1}{n}<\frac{1}{N_0}$ ולכן אם x_1,x_2 ב- $[a,b+1]$

כך ש: $|x_1-x_2|<\frac{1}{N_0}<\delta$ אז $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

כעת, עבור קטע $I_k=\left[x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}\right]$, כל עוד $n>N_0$ וכן $t\in I_k$:

$$\left|f(t)-f(x+\tfrac{k}{n})\right|<\varepsilon \Longleftarrow \left|t-(x+\tfrac{k}{n})\right|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N_0}<\delta$$

ומכאן שלכל $x\in[a,b]$ ו- $n>N_0$ נקבל:

$$|f_n(x)-f(x)|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}\left|f(x+\tfrac{k}{n})-f(t)\right|dt<\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}\varepsilon\,dt=n\cdot\frac{1}{n}\cdot\varepsilon=\varepsilon$$

כנדרש!

---

4) ג. $\sum_2^\infty \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $(-a,a)$:

פתרון: לפי טיילור, לוגריתם ידוע: $\ln(1+x)\le x$ לכל $x\ge0$.

ולכן: $\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\le\frac{x^2}{n\ln^2 n}\le\frac{a^2}{n\ln^2 n}$ לכל $x\in(-a,a)$. כעת נבחן

העיבוי. לטור $\sum_2^\infty\frac{a^2}{n\ln^2 n}$ ולכן

$$\sum_2^\infty\frac{2^n a^2}{2^n(\ln 2^n)^2}=\underbrace{\sum_2^\infty\frac{a^2}{n^2(\ln 2)^2}}_{\text{טור מתכנס!}}$$

לכן לכל $x\in(-a,a)$ $\left|\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\right|\le\frac{a^2}{n\ln^2 n}$ ולפי M-test של ויירשטראס

הטור שלנו מתכנס במידה שווה!

$\underline{ב \quad 4}$

בינתיים

$[0,\infty)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}$

לכן, ננסה למצוא $f_n(x) = \frac{x^2}{e^{nx}} \geq 0$

להשתמש ב- M-test: $\sup_{[0,\infty)} \frac{x^2}{e^{nx}}$

$$\left(\frac{x^2}{e^{nx}}\right)' = \frac{2x \cdot e^{nx} - x^2 e^{nx} \cdot n}{e^{2nx}} = \frac{x[2-xn]}{e^{nx}}$$

$$f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{2}{n} \text{ או } x = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{nx}} \overset{L}{\underset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{ne^{nx}} \overset{L}{\underset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{n^2 e^{nx}} = 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

לכן $\sup_{[0,\infty)} \left|\frac{x^2}{e^{nx}}\right| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^{n\cdot\frac{2}{n}}} = \frac{4}{n^2 e^2}$

ולכן $\sum_1^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_1 \frac{4}{n^2 e^2} < \infty$ ומוויירשטראס M-test נקבל התכנסות במ"ש.

ג $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$

ראשית, ניתן לחשב את סכום הטור כסכום טור הנדסי עם מנה $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\underline{x \neq 0} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}$$

$$= \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

ועבור $x=0$ הסכום הוא אפס.

אם ההתכנסות הייתה במידה שווה אז מכיוון ש- $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ רציפות, היינו מקבלים לפי משפט הגבול, ש- $\frac{1}{x}$ ל- $x \neq 0$ ו- 0 ל- $x=0$, רציפה, אך זה לא נכון! לכן לא מתכנס במ"ש!

---

3 הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{1}{4^n x}$

יש התכנסות נקודתית כי ניתן להשוות טור לטור $\sum_1^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{x}$ (בדוק!). נראה התכנסות במ"ש:

נשתמש בקריטריון קושי:

$$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| = \left|3^{n+1} \sin\frac{1}{4^{n+1}x} + \dots + 3^{n+p} \sin\frac{1}{4^{n+p}x}\right|$$

לכן אם ניקח $x_n = \frac{1}{4^n}$ ונסתכל על $S_{2n}-S_n$ נקבל:

$$\left|S_{2n}(x_n) - S_n(x_n)\right| = \left|3^{n+1}\sin\frac{1}{4} + 3^{n+2}\sin\frac{1}{4^2} + \dots + 3^{2n}\sin\frac{1}{4^n}\right| > 3^{n+1}\sin\frac{1}{4} > 1$$

כי $\sin\frac{1}{4^n} > 0$!

ל-n גדול מספיק!

לכן אין התכנסות במידה שווה!

שאלה 2

ידוע $f_n \xrightarrow[{[a,b)}]{\text{במ"ש}} f$, וקיימת התכנסות נקודתית $f_n(b) \to f(b)$.

נוכיח כי קיימת התכנסות במ"ש בקטע הסגור $[a,b]$.

יהי $\varepsilon>0$. מהנתון על $f_n \xrightarrow[{[a,b)}]{\text{במ"ש}} f$ נובע שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \geq n_0$ ו- $x \in [a,b)$ גורר $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

באופן דומה עבור אותו $\varepsilon>0$ קיים $n_1 \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \geq n_1$ גורר $|f_n(b) - f(b)| < \varepsilon$. לכן עבור $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$ נקבל $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $n \geq n_2$ ו- $x \in [a,b]$.