אינפי 1 - תרגיל 7

1. הוכח/הפרך: $\sum a_n$ מתכנס, עבור הסדרות הבאות:

   a. $a_n=-\frac{1}{n}$ עבור n שמתחלק ב3, ו $a_n=\frac{1}{n}$ אחרת. כלומר
   $a_n=1,\frac{1}{2},\left(-\frac{1}{3}\right),\frac{1}{4},\frac{1}{5},\left(-\frac{1}{6}\right),\dots$.

   b. $a_n=-\frac{1}{n}$ עבור n זוגי, ו $a_n=\frac{1}{n^2}$ אחרת. כלומר
   $a_n=1,\left(-\frac{1}{2}\right),\frac{1}{9},\left(-\frac{1}{4}\right),\frac{1}{25},\left(-\frac{1}{6}\right),\dots$.

   c. $a_n=-\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}+1}$ עבור n זוגי, ו $a_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}-1}$ אחרת.

2. יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. נגדיר את סדרת ה"זנבות" של הטור $d_k=\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. הוכח/הפרך:

   a. אם טור מתכנס אזי סדרות הזנבות שלו מוגדרת ושואפת לאפס.

   b. אם סדרת הזנבות של הטור מוגדרת אזי היא שואפת לאפס.

   c. אם סדרת הזנבות מוגדרת אזי הטור מתכנס.

   הערה: זנב הטור הינו טור בעצמו. לכן סדרת הזנבות מוגדרת רק אם הטורים שהם הזנבות מתכנסים.

3. יהא הטור $\sum \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{\ln(n+1)}$. האם הטור מתכנס? האם הטור מתכנס בהחלט?

4. יהי $x>0$. הוכח ש $\sum\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^n$ מתכנס ומצא את סכומו.

5. (שאלה ממבחן של פרופ' זלצמן). בדוק את ההתכנסות וההתכנסות בהחלט של הטורים

   a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$

   b. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}}$

   c. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\log n)^2}$

6. (שאלה ממבחן של פרופ' זלצמן). בדוק את ההתכנסות וההתכנסות בהחלט של הטורים

   a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

   b. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{1}{n}$

   c. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

7.

a. תהי a_n סדרה המקיימת $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \quad \forall n:$. הוכח/הפרך: הטור $\sum a_n$ מתכנס.

b. תהי a_n סדרה המקיימת $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\le\alpha<1 \quad \forall n:$. הוכח/הפרך: הטור $\sum a_n$ מתכנס.

8. (שאלה ממבחן של פרופ' זלצמן) הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם קיים $C>0$ כך שלכל סדרה b_n המקיימת $\forall n: |b_n|\le 1$ וגם $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\le C$