

תרגיל בית מספר 2

שאלה 1

חשבו את הגבול (או הוכיחו שלא קיים):

$$(א) \left\{ \left(\frac{n^3 + 4n - 5}{n^6 + 2n^2 - 3}, n - 7 \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

(ברכיב הימני מופיעה פונקציה הערך השלם)

$$(ב) \left\{ \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right), \frac{n^2}{2^n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

שאלה 2

חשבו את הגבולות של הפונקציות הבאות (או הוכיחו כי אינם קיימים):

$$(א) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{|x| + |y|} \cos(y^2)$$

$$(ב) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y)^2}{x^2 + y^2}$$

$$(ג) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\arcsin(xy - 2)}{\arctan(3xy - 6)}$$

$$(ד) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

שאלה 3

האם ניתן להגדיר את הפונקציות הבאות ב $(0,0)$ כך שתהיינה רציפות (אם כן, כיצד?)

$$(א) f(x, y) = x \ln(x^2 + 3y^2)$$

$$(ב) f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

שאלה 4

בדקו את רציפות הפונקציה בנקודה $(1,2)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-2)}, & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

שאלה 5

תזכורת: $f(x, y)$ רציפה ב- (x_0, y_0) לפי המשתנה x אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$.

כלומר, אנחנו מקבעים $y = y_0$ ובכך מקבלים פונקציה של משתנה אחד. באופן דומה,

$f(x, y)$ רציפה ב- (x_0, y_0) לפי המשתנה y אם $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$.

הוכיחו: אם פונקציה $f(x, y)$ רציפה ב- (x_0, y_0) אזי היא רציפה ב- (x_0, y_0) לפי x ולפי y . הראו ע"י דוגמא נגדית שההיפך לא בהכרח נכון (כלומר, רציפות בנקודה לפי המשתנה x בנוסף לרציפות בנקודה לפי המשתנה y אינה גוררת רציפות בנקודה).

בהצלחה!