אלגברה לינארית 2 למדעי המחשב תשע"א
תרגיל 2 – העתקות לינאריות

.1

1.10 תרגיל. א. נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ לפי: $T(x,y)=(x+2y,2x+y)$ הוכח (ישירות) ש T העתקה לינארית.

ב. **העתקת המטריצה**: נקבע מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. נגדיר $T:\mathbb{F}^{n\times 1}\to\mathbb{F}^{1\times m}$, $S:\mathbb{F}^{m\times 1}\to\mathbb{F}^{n\times 1}$ ע"י $T(v)=Av$ ו $S(v)=v^tA$. הוכח ש T,S העתקות לינאריות.

ג. השתמש ב(ב) להוכיח את (א) בדרך אחרת.

ד. הוכח שאם $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $0\neq b\in\mathbb{F}^m$ ו $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ מוגדרת ע"י $T(v)=Av+b$, אזי T אינה העתקה לינארית.

ה. נסח והוכח את סעיפים (ב) ו(ד) עבור המקרה הכללי: $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, ו $T:\mathbb{F}^{n\times k}\to\mathbb{F}^{m\times k}$.

.2

1.11 תרגיל. תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית. הוכח:

א. אם $T(v_1),\ldots,T(v_n)$ בת"ל, אז גם $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל.

.3

1.28 תרגיל. נתונה ההעתקה $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת על ידי

$T(1)=x^2;\ T(x)=2x+3;\ T(x^2)=3x$.

א. האם יתכן ש $T(2-4x+5x^2)=2x^2+7x-10$? הסבירו.

ב. מצאו את $T(ax^2+bx+c)=?$.

ג. מצאו העתקה שונה $T\neq S:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ ש $S(1)=x^2, S(x)=2x+3$ ומצאו את ההגדרה שלה (כמו שעשיתם בסעיף ב').

4. נתונה העה"ל : $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י : $T(x,y,z)=(x-y,y+2z,z+x)$.

א. בהינתן הבסיסים

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\},$$

מצאו את ההצגות המטריציות הבאות : $[T]_B^B,[T]_B^C,[T]_C^B$.

ב. נתון ש : $[v]_B=(1,1,2)$. מצאו את $[T(v)]_C$.

.5

1.29 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n. הוכח שלכל העתקה לינארית $T:V\to W$ שאינה העתקת האפס יש בסיס B של V עבורו $T(v)\neq 0$ לכל $v\in B$. [רמז: קח וקטור v עבורו $T(v)\neq 0$, והשלם אותו לבסיס B. אם יש $w\in B$ כך ש $T(w)=0$, החלף אותו בוקטור $v+w$. מדוע זה נשאר בסיס? (תרגיל ישן)]

6. תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית שהצגת ביחס לבסיס

$S=\{(1,0,0),(1,0,2),(1,1,1)\}$ היא: $[T]_S=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

עבור הווקטור $v=(0,1,-5)$ ב- R^3 חשב את $[T(v)]_E$ (E- בסיס סטנדרטי)

ומצא את $[T]_E$ (שימו לב : כשכותבים $[T(v)]_B$ עבור בסיס B כלשהו הכוונה

$([T(v)]_B^B$).

.7

6.27 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ותהא $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^2=-I$, ונתון ש $\dim(V)>1$.

א. הוכח שלכל $v\neq 0$, $v, T(v)$ בת"ל.

ב. נניח ש $\dim(V)=2$. מצא בסיס B עבור V כך ש $[T]_B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. [ראה: (ב)]

תיקון : הרמז הוא א'!