22.7.19

אלגברה לינארית הרצאה 4

הגדרה:

חזקה של מטריצה מוגדרת על מטריצה ריבועית $A\in F^{n\times n}$ באינדוקציה:

$A^0=I_n$, $A^1=A$, $A^2=A\cdot A$ ...

תכונות החזקה (ניתן להוכיח באינדוקציה): $A\in F^{n\times n}$, $k,m\in \mathbb{N}\cup\{0\}$
$(k,m\in \mathbb{Z})$

1. $A^k\cdot A^m=A^{k+m}$
2. $(A^k)^m=A^{k\cdot m}$

תזכורת:

תהי $0\neq A\in F^{n\times n}$. אם קיימת $0\neq B\in F^{n\times n}$ כך ש- $AB=0$ אזי: A נקראת מחלק אפס (כנ"ל $BA=0$).

בלוק ז'ורדן הוא תמיד מחלק אפס.

הגדרה:

$A\in F^{n\times n}$ נקראת הפיכה אם קיימת $B\in F^{n\times n}$ כך ש- $AB=BA=I$. במקרה כזה אומרים ש- B היא ההופכית של A ומסמנים $B=A^{-1}$

דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

טריק:

עבור מטריצה 2x2:

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, אז ההופכית שלה - אם היא קיימת(!!!!!!) היא: $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

מכאן שמטריצה 2x2 אינה הפיכה אם מתקיים $ad-bc=0$.

מטריצת האפס אינה הפיכה!!! $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ - אינה הפיכה!!! בלוק ז'ורדן אינו הפיך!!!

משפט:

תהי A מטריצה הפיכה, אזי:

1. A ריבועית.
2. יש רק מטריצה אחת B ההופכית ל-A.
3. גם A^{-1} הפיכה ומתקיים $(A^{-1})^{-1}=A$.

הוכחה:

1. A הפיכה ולכן קיימת B: $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{k\times l}$ כך ש- $\overset{\text{מוגדר}}{AB=I} \Rightarrow n=k$

$\overset{\text{מוגדר}}{BA=I} \Rightarrow m=l$

$$AB_{m\times m} = BA_{n\times n}$$
$$I_m = I_n$$
$$\Downarrow$$
$$m=n$$

2. ראינו ב-1 שכל ההופכיות מאותו סדר. נניח ש- $B,C\in F^{n\times n}$ הופכיות ל- $A\in F^{n\times n}$:

$$C=CI=C(AB)\underset{\text{אסוציאטיביות}}{=}(CA)B=IB=B$$

3. $A^{-1}A=A\cdot A^{-1}=I$ לפי ההגדרה, כלומר A היא ההופכית של A^{-1}, אבל $(A^{-1})^{-1}$ היא ההופכית של A^{-1} לפי סעיף 2, ולכן לפי 2 מתקיים ש- $A=(A^{-1})^{-1}$

הערה:

$I^{-1}=I$

משפט:

יהיו $A,B\in F^{n\times n}$ הפיכות. אזי: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

הוכחה:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=(A\cdot I)A^{-1}=$$
$$=AA^{-1}\underset{\text{אסוציאטיביות}}{=}I$$

כנ"ל בצד שני.

<u>תרגיל:</u>

A מטריצה מחלקת אפס. הוכח ש- A אינה הפיכה.

הוכחה:

נניח בשלילה ש- A הפיכה, ולכן קיימת B כך ש- $AB=BA=I$. מאידך, ידוע ש- A מחלקת אפס, ולכן קיימת $C\neq0$ כך ש- $CA=0$ בה"כ. נכפול מימין ב- B

$(CA)B=0\cdot B$

$C(AB)=0$

$CI=0$

$C=0 \Rightarrow$ בסתירה לכך ש- $C\neq 0$

(כלומר הוכחנו שמחלק אפס (לדוגמא 0) אינו הפיך). דוגמה נוספת:

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$AB=\left(a\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix},\ b\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\right)$

$a=2 \quad c=-1$

$b=4 \quad d=-2$

$B=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}$

מחלקי אפס אינן הפיכות.

<u>הערה:</u>

פעולת שורה נסמן ב- ρ (רו), והפעלת פעולת שורה על A נסמן $\rho(A)$.

אם נבצע פעולת שורה אחת על המטריצה I נסמן אותה $\rho(I)$ והיא נקראת <u>מטריצה אלמנטרית</u>.

<u>דוגמה:</u>

1. החלפת שורות $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{\rho}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

2. כפל בסקלר $-3R_1$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-3R_1]{\rho}\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

3. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2+2R_1]{\rho}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

<u>הערה:</u> !

תהי ρ פעולת שורה אלמנטרית. אז:

א. לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים ש- $\rho(A)=\rho(I)A$

ב. $\rho(I)$ היא הפיכה ומתקיים $\rho^{-1}(I)=(\rho(I))^{-1}$ כאשר ρ^{-1} היא הפעולה ההפוכה ל- ρ

דוגמה:

1)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

$$\rho(I):\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\underbrace{\begin{pmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}}_{\rho(A)}$$

$$\rho(I)\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}=\rho(A)$$

2)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+2R_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\6&9&12\\7&8&9\end{pmatrix}}_{\rho(A)}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\6&9&12\\7&8&9\end{pmatrix}}_{\rho(I)\cdot A}$$

הפעולה ההפוכה ל- ρ (R_2+2R_1) היא $R_2-2R_1=\rho^{-1}$

$$\rho^{-1}(I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\rho^{-1}(I)}$$

3)

$$\rho(I)\cdot\rho^{-1}(I)=I$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(\rho(I))^{-1}=\rho^{-1}(I)$$

המשך ההערה:

הוכחה:

א. נסמן $I=\begin{pmatrix}-e_1-\\ \vdots\\ -e_n-\end{pmatrix}$

$e_i=(0\ldots\underset{i}{1}\ldots0)$

ונבדוק את האפשרויות עבור פעולות השורה

1) $\rho: R_i\leftrightarrow R_j$ $(1\le i,j\le n)$

$$\rho(I)=\begin{pmatrix}-e_1-\\ \vdots\\ -e_i\ldots-\\ -e_j-\\ -e_i-\\ -e_n-\end{pmatrix}$$

ב. ρ פעולת שורה אלמנטרית ולכן לפי א' $\rho(I)\cdot\rho^{-1}(I)=\rho(\rho^{-1}(I))=I$

$\rho^{-1}(I)\cdot\rho(I)=\rho^{-1}(\rho(I))=I$

לכן $\rho(I)$ ו- $\rho^{-1}(I)$ הפיכות

כלומר $\rho^{-1}(I)=\rho(I)^{-1}$

הערה: את שאר הפעולות ניתן לעשות בצורה דומה.

$$e_i(A)=(0\ldots,\underset{i}{1},\ldots0)A=R_i(A)$$

$$\rho(A)=\begin{pmatrix}-e_1(A)-\\ \vdots\\ -e_j(A)-\\ -e_{i+1}(A)-\\ \vdots\\ -e_i(A)-\\ -e_{j+1}(A)-\\ \vdots\\ -e_n(A)-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_j\\ e_{i+1}\\ \vdots\\ e_i\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}A=\rho(I)\cdot A$$

ρ ~~$e_i(A)$~~

הערה:

לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית אחת בלבד.

משפט:

תהא $A \in F^{m \times n}$ ותהא $CF(A)$ הצורה המדורגת קנונית שלה. אזי קיימות מטריצות שורה אלמנטריות $E_1, \dots, E_k$ כך ש- $(E_k \cdots E_2 \cdot E_1) \cdot A = CF(A)$

הקדמה להוכחה:

ניתן להגיע מ-A ל-$CF(A)$ ע"י מספר סופי של פעולות שורה: $\rho_1, \dots, \rho_k$. לפי המשפט הקודם נסמן $\rho_i(I) \cdot A = \rho_i(A)$ ונסמן $\rho_i(I) = E_i$.

הוכחה:

$$A \xrightarrow{\rho_1} \xrightarrow{\rho_2} \cdots \xrightarrow{\rho_k} CF(A)$$

$$\rho_k(I) \cdot \rho_{k-1}(I) \cdot \ldots \cdot \rho_2(I) \cdot \rho_1(I) \cdot A = CF(A)$$

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = CF(A)$$

משפט:

אם A שקולת שורה ל-B אזי יש מטריצה הפיכה P כך ש- $PA = B$.

הוכחה:

A שקולת שורה ל-B ולכן ניתן להגיע מ-A אל B ע"י k פעולות שורה.

$$A \xrightarrow{\rho_1} \xrightarrow{\rho_2} \cdots \xrightarrow{\rho_k} B$$

לפי המשפט הקודם $\underbrace{(E_k \cdot \ldots \cdot E_1)}_{P} \cdot A = B$

P - מכפלה של מטריצות אלמנטריות. מטריצות אלמנטריות הן הפיכות כפי שהוכחנו. הוכחנו שמכפלה של שתי מטריצות הפיכות היא הפיכה. ניתן להוכיח באינדוקציה שמכפלה של k מטריצות הפיכות היא הפיכה.

ולכן P הפיכה וההופכית שלה: (הוכח תרגול/עצמאי) P $P^{-1} = (E_k \cdot \ldots \cdot E_1)^{-1} = (E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1})$

הערה:

באותו אופן שהגדרנו מטריצות שורה אלמנטריות (שהן מקבילות לפעולות שורה) ניתן להגדיר מטריצות עמודה אלמנטריות (שהן מקבילות לפעולות עמודה). ההבדל הוא שבמטריצות עמודה אלמנטריות מכפילים מימין $\eta(A) = A\eta(I)$
אטה

דוגמה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & -10 & 6 \\ 7 & -16 & 9 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

~~הגדרה~~ **הגדרה:** אלגוריתם למציאת ההופכית

~~תהא $A \in F^{n\times n}$~~

$A \xrightarrow{\rho_1} \dots \xrightarrow{\rho_k} I$

$\underbrace{(\rho_k \dots \rho_2 \rho_1)}_{A^{-1}} \cdot A = I$

$(A \mid I) \xrightarrow{\rho_1} (\rho_1(A) \mid \rho_1(I)) \to \dots \to (I \mid A^{-1})$

אם נקבל בצד שמאל שורת אפסים זה אומר שאינה הפיכה (הפיכה)

הגדרה:

תהא $A \in F^{n\times n}$ מטריצה $B \in F^{n\times n}$ היא הופכית מימין של A אם מתקיים $AB = I$.
מטריצה $C \in F^{n\times n}$ היא הופכית משמאל של A אם מתקיים $CA = I$.

משפט:

מטריצה $A \in F^{n\times n}$ הפיכה $\Leftrightarrow$ ל-A יש הופכית מימין ומשמאל.

הוכחה:

$\Leftarrow$ לפי ההגדרה.

$\Rightarrow$ נניח של-A יש הופכית מימין ומשמאל: $CA = I$, $AB = I$.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{CA}_{I}B = C \cdot I = C \\ C\underbrace{AB}_{I} = I \cdot B = B \end{array}\right\} B = C$$

משפט:

תהא $A, B \in F^{n\times n}$ אם מתקיים ש-$AB = I$ אז ~~גם~~ $BA = I$, כלומר אם ל-A יש הופכית מימין היא גם משמאל.

הערה: נוכל להוכיח גם להיפך.

הוכחה:

נניח $AB = I$.

טענה 1: ב-A אין שורת אפסים.

~~[illegible]~~ נניח בשלילה שהשורה ה-i של A היא שורת אפסים: $e_i(A) = 0$. אזי שורה i של AB: $e_i(A)B = 0B = 0$ ~~[illegible]~~ בסתירה לכך ש-$AB = I$.

טענה 2: ב-$CF(A)$ אין שורת אפסים.

נניח בשלילה שב-$CF(A)$ יש שורת אפסים. לפי משפט קודם ראינו ~~[illegible]~~ $\underbrace{(E_k \dots E_1)}_{P\text{ הפיך}} \cdot A = CF(A)$, $P = PI = PAB = CF(A)B$ ~~[illegible]~~ ולכן $I = PP^{-1} = CF(A)BP^{-1}$. ב-$CF(A)$ יש שורת אפסים ולכן במכפלה גם יש שורת אפסים בסתירה.

הופכה לכל [illegible]

המשך ההוכחה:

מסקנה משתי הטענות - אם ב- $CF(A)$ אין שורת אפסים אז $CF(A)=I$ (הטבה: A היא ריבועית)

ולכן אם במטריצה המדורגת קנונית אין שורת אפסים, ישנו איבר מוביל בכל שורה/עמודה כך שאין לו כלום מעליו ומתחתיו, כלומר $CF(A)=I$

סימון: $PA=CF(A)=I$

$$PA=I$$

נכפיל ב-B מימין

$$PAB=IB$$
$$PI=B$$
$$P=B \quad \square$$

במטריצה דומה ניתן להוכיח שאם $BA=I$ אזי $AB=I$ ו-B ההופכית של A.

<u>תרגיל:</u>

יהיו $A,B\in F^{n\times n}$ הוכיחו: AB הפיכה $\Leftarrow$ A,B הפיכות.

הוכחה:

AB הפיכה ולכן קיימת לה $C\in F^{n\times n}$ כך שמתקיים $C(AB)=(AB)C=I$

$C(AB)=I \Leftarrow (CA)B=I \Leftarrow B$ הפיכה מימין $\overset{\text{המשפט הקודם}}{\Leftarrow}$ B הפיכה משמאל $\Leftarrow B$ הפיכה

$(AB)C=I \Leftarrow A(BC)=I \Leftarrow A$ הפיכה משמאל $\overset{\text{המשפט הקודם}}{\Leftarrow}$ A הפיכה מימין $\Leftarrow A$ הפיכה

<u>משפט:</u>

$Q\in F^{n\times n}$ הפיכה $\Leftrightarrow$ ניתן להציג אותה כמכפלה של ~~הפיכות~~ מטריצות אלמנטריות.

הוכחה:

$\Leftarrow$ Q הפיכה ולכן $CF(Q)=I$. קיימות k מטריצות אלמנטריות כך ש:

$CF(Q)=(e_k\cdots e_1)\cdot Q$ המטריצות האלמנטריות הפיכות ולכן ניתן להכפיל משמאל בהופכית:

$$e_k^{-1}/(e_k\cdot e_{k-1}\cdot\ldots\cdot e_1)Q=I$$

$$e_{k-1}^{-1}/(e_{k-1}\cdot\ldots\cdot e_1)Q=I\cdot e_k^{-1}=e_k^{-1}$$

$$Q=(E_1^{-1}\cdot\ldots\cdot E_k^{-1})$$

$\Rightarrow$ כמובן

<u>דוגמה:</u>

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\2&5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-2R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&5&-2\\0&1&-2&1\end{array}\right)$$

הערה:

שקילות שורה הוא יחס שקילות, כלומר כל המטריצות מאותו גודל שהן שקולות שורה נמצאות באותה מחלקת שקילות. הסבר: 1) A שקולת שורה לעצמה כיוון שניתן להגיע אליה מעצמה על ידי 0 פעולות שורה.

2) אם אפשר להגיע מ-A ל-B אפשר גם מ-B ל-A. 3) אם אפשר להגיע מ-A ל-B ומ-B ל-C אפשר להגיע מ-A ל-C.