88-113-2014-תרגיל 3:

ע"מ 81:

1.6 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

א. מצא את הערכים העצמיים של A. [רמז: בעזרת דטרמיננטה]

ב. מצא את המרחבים העצמיים של A.

1.7 תרגיל. הוכח שלמטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ אין ערכים עצמיים.

1.9 תרגיל[1]. [מקור: תהליכים מקריים] **מטריצת מרקוב** היא מטריצה ריבועית, שסכום אברי כל עמודה שלה הוא 1. תהא A מטריצת מרקוב. הוכח שלמטריצה A^t יש ערך עצמי $\lambda=1$. מהו הוקטור העצמי המתאים?

1.12 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ותהא $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ ההעתקה של כפל במטריצה A משמאל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. v וקטור עצמי של A (המתאים לערך עצמי λ).

ב. v וקטור עצמי של T_A (המתאים לערך עצמי λ).

תזכורת- מטריצה נילפוטנטית:

מטריצה נילפוטנטית מסדר i, היא מטריצה ריבועית A כך ש: $A^i = 0 \wedge A^{i-1} \neq 0$

1.15 תרגיל*. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה נילפוטנטית מסדר k.

א. מהם הערכים העצמיים של A ?

ב. הוכח (לא בעזרת (ג)): $\alpha I-A$ הפיכה $\Leftrightarrow$ $\alpha\neq 0$.

קבוצת הערכים העצמיים של העתקה לינארית T נקראת **הספקטרום של** T, ומסומנת $\sigma(T)$. באופן דומה מגדירים את $\sigma(A)$ עבור מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

1.18 תרגיל. א. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: $\sigma(AB)=\sigma(BA)$. [ראה: $A(BA)v=(AB)Av$. יש לטפל בנפרד במקרה $Av=0$]

ב. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: $\sigma(A)=\sigma(A^t)$. [ראה: בעזרת דטרמיננטה]