פרק 2 - אידאלים ראשוניים ומקסימלים

תזכורת: אידאל נקרא אמיתי $\Leftrightarrow I \neq R$.

לכל חוג יש את עצמו בתור אידאל, ואת אידאל האפס. ניתן לבנות שריג אידאלים

הגדרה: שריג הוא קבוצה סגורה שבו לכל שני איברים קיים איבר מקסימלי שקטן משניהם, ואיבר מינימלי שגדול משניהם

לדוגמה - אם I, J אידאלים של R:

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[d, dash] & \\
& I+J \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
I \arrow[dr, dash] & & J \arrow[dl, dash] \\
& I \cap J \arrow[d, dash] & \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

הגדרה

"אידאל מינימלי" הוא אידאל$\neq 0$ שאינו מכיל אף אידאל$\neq 0$ אחר.

הערה

בכל חוג סופי שאינו שדה יש אידאלים אמיתיים מינימליים

הערה

בתחום שלמות[1] לא קיימים אידאלים מינימליים

[1] חוג קומוטטיבי בלי מחלקי אפס

הוכחה

יהי R תחום שלמות. יהי $R \lhd I$ אידאל מינימלי. מכיוון ש$I \neq 0$ יש $0 \neq a \in I$.
$I \supseteq Ra = \{xa | x \in R\}$ אידאל בגלל המינימליות של $I = R_a$.
נתבונן באידאל $Ra^2 \subseteq Ra$. בגלל המינימליות $a \in Ra = Ra^2$. כלומר קיים $x \in R$
כך ש$a = xa^2 \Leftarrow (1 - xa)\, a = 0 \Leftarrow xa = 1$.
הוכחנו שa הפיך $\Leftarrow$ לכן $I = R$

הגדרה

אידאל אמיתי הוא מקסימלי אם הוא אינו מוכל באף אידאל אמיתי אחר.
כלומר $M \lhd R$ כך ש$M \subseteq M' \lhd R \Leftarrow M = M'$

הלמה של צורן

נניח ש$(\Lambda, \leq)$ קבוצה סדורה, כל ש<u>לכל שרשרת</u> יש <u>חסם מלעיל</u>. אז יש בΛ איבר מקסימלי(כלומר שאין גדול ממנו)

הערה הלמה של צורן שקולה לאקסיומת הבחירה, שאומרת של<u>כל</u> משפחה של קבוצות לא ריקות X_λ, $\prod X_\lambda \neq \emptyset$
יש מתמטיקאים שלא מאמינים באקסיומת הבחירה.

מהלמה של צורן נוכיח שקיימים אידיאלים מקסימליים(וניתן להוכיח גם את ההפך).

גרסת הקבוצות של הלמה

תהינה X קבוצה ו$\Omega \subseteq P(X)$. Ω סדורה ביחס להכלה. נניח שלכל שרשרת של אברים בΩ, האיחוד שייך לΩ(אז האיחוד הוא חסם מלעיל על השרשרת). <u>אז</u> קיים בΩ איבר מקסימלי.

משפט

יהי R חוג עם יחידה, אזי יש אידיאל מקסימלי המכיל את I

הוכחה

נסמן $\Omega = \{$האידיאלים האמיתיים של R המכילים את $I\}$. נוכיח שהאיחוד של שרשרת אידיאלים אמיתיים המכילים את I היא אידיאל אמיתי המכיל את I.

(**תרגיל**: איחוד על פני שרשרת של אידיאלים הוא אידיאל)

הדבר היחיד שלכאורה אינו טריוויאלי הוא הטענה שהאיחוד$\neq R$. אבל זה נכון כי אידיאל אמיתי אינו מכיל את 1. לפי הלמה של צורן יש בΩ איבר מקסימלי והוא אידיאל מקסימלי המכיל את I.

מסקנה

בכל חוג עם יחידה יש אידיאל מקסימלי(בחר $I=0$)

יהיו R חוג וM אידיאל מקסימלי. מה אפשר לומר על R/M?

הגדרה

חוג R שאין לו אידיאלים$\neq 0, R$ נקרא <u>חוג פשוט</u>.

הערה

0 אידאל מקסימלי $\Leftrightarrow R$ פשוט

טענה

M מקסימלי $\Leftrightarrow R/M$ חוג פשוט.

הוכחה

כל אידאל J_0 של חוג מנה R/I הוא מהצורה J/I כאשר $R \lhd J \subseteq I(\alpha$ $J = \bigcup\limits_{\alpha \in J_0}$

טענה

חוג קומוטטיבי הוא פשוט $\Leftrightarrow$ הוא <u>שדה</u>.

הוכחה

- $\Rightarrow$ בשדה אין אידאלים אמיתיים$\neq 0$(כי כל אידאל$\neq 0$ מכיל איבר הפיך), לכן הוא פשוט.
- $\Leftarrow$ יהי R חוג קומוטטיבי פשוט.
  הדבר היחיד שצריך להוכיח הוא שכל איבר $a \neq 0$ הפיך.
  $R \lhd Ra \neq 0 \Leftarrow Ra = R \ni 1 \Leftarrow ba = 1 q_b \exists \Leftarrow a$ הפיך.

מסקנה(הכי חשובה בשיעור הזה)

בחוג קומוטטיבי R, אידאל $R \lhd M$ הוא מקסימלי $\Leftrightarrow R/M$ שדה.

תרשים סוגי חוגים:

$$
\begin{tikzcd}
\text{ring} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{completeness} \arrow[d] & \text{ring with division} \arrow[d] \\
\text{commutative ring} & \text{simple ring}
\end{tikzcd}
$$

הערה

D הוא חוג עם חילוק $\Leftrightarrow$ אין לD אידאל שמאלי אמיתי$\neq 0$.

דוגמאות לחוגים פשוטים

- כל חוג עם חילוק
- אם R פשוט, גם $M_n(R)$ פשוט
- אם R פשוט, גם $R((x))$ פשוט

משפט

יהי R חוג פשוט. אזי, המרכז שלו הוא שדה.

הוכחה

$Z(R) \subseteq R$ הוא קומוטטיבי. צריך להוכיח שכל איבר מהמרכז הפיך במרכז.
לכל $0 \neq a \in Z(R)$, $Ra \lhd R$(כיוון שa במרכז, ואז $aR = Ra$ ולכן Ra אידאל). מכיוון שR פשוט, $Ra = R$, לכן a הפיך. נסמן: $ab = 1$. $xa = ax$, לכן $x = bxa$, לכן $bx = xb$ ולכן $b \in Z(R)$. לכן, a הפיך ב$Z(R)$, לכן $Z(R)$ שדה.

הגדרה

חוג R הוא ראשוני אם $AB = 0$$\Leftarrow$$A = 0$ או $B = 0$.
(כלומר אם $0 \neq A, B \lhd R$ $\Leftarrow$ $AB \neq 0$)

הערה

בכל חוג R ולכל איבר a, $RaR = \{\sum x_i a y_i | x_i, y_i \in R\}$ הוא האידאל הנוצר ע"י a - האידאל הקטן ביותר המכיל את a.
(אם R קומוטטיבי, $RaR = aR = Ra$)

טענה

R חוג ראשוני אם ורק אם לכל $a, b \neq 0$ קיים $x \in R$ כך ש$axb \neq 0$.

מסקנה

כל תחום הוא ראשוני.

מסקנה

חוג קומוטטיבי הוא ראשוני $\Leftrightarrow$ הוא תחום שלמות.

הוכחת הטענה

$\Leftarrow$ נניח שR ראשוני, יהיו $a, b \neq 0$. נבחר את האידאלים:

$$A = RaR \qquad B = RbR$$

$A \neq 0$ כי $a \in A$, ו$B \neq 0$ כי $b \in B$.
לפי הגדרת חוג ראשוני, כיוון ש$A, B \neq 0$:

$$0 \neq AB = RaRRbR = RaRbR \Leftrightarrow aRb \neq 0$$

וזה קורה אם ורק אם קיים $x \in R$ כך ש$axb \neq 0$.

$\Rightarrow$ נניח שלכל $a, b \neq 0$ קיים $x \in R$ כך ש$a \times b \neq 0$. יהיו $A, B \lhd R$ $0 \neq$. לכן $\exists_{a \neq 0} a \in A$ ו$\exists_{b \neq 0} b \in B$. לפי ההנחה קיים $x \in R$ כך ש$axb \neq 0$. $ax \in A$, $b \in B$ ולכן $0 \neq axb \in AB$ ולכן $AB \neq 0$ ולכן R חוג ראשוני.

טענה

כל חוג פשוט הוא ראשוני.

הוכחה

אם $A, B \neq 0$, כיוון שהחוג R פשוט נקבל ש$A = B = R$, ואז $AB = RR = R \neq 0 \Leftarrow$ $B \neq 0$ ונקבל שR ראשוני.

הגדרה

יהי R חוג כלשהו. $P \lhd R$ נקרא אידאל ראשוני, אם R/P חוג ראשוני.

טענה

P ראשוני $\Leftrightarrow$ לכל $A, B \lhd R$ אם $AB \subseteq P$ אז $A \subseteq P$ או $B \subseteq P$.