תכולה: שטח ב$\mathbb{R}^2$
נפח ב$\mathbb{R}^3$
מושג כללי ב$\mathbb{R}^k$

תזכורת

$\bar{D}=D\cup\partial D$ תחום סגור וחסום.
שריג(mesh) עם קבוע שריג $r>0$: $[(i-1)r,ir]\times[(j-1)r,jr]$, $i,j\in\mathbb{Z}$.

A_r: אוסף כל הריבועים(סגורים) בשריג המוכלים בD.

C_r: אוסף כל הריבועים בשריג הפוגשים את ∂D

$$B_r=A_r\cup C_r$$

אלו הם אוספים סופיים, שכן D תחום חסום.
$S(A_r)=r^2\times$(מס' הריבועים בA_r)
$S(B_R)=r^2\times$(מס' הריבועים בB_r)

הגדרה: אומרים ש$\bar{D}$ הוא בעל שטח אם $\exists\lim_{r\to0}S(B_r)=\exists\lim_{r\to0}S(A_r)$.
המס' המשותף נקרא אז השטח של $\bar{D}$, מסומן $S(\bar{D})$.

כיוון ש$S(C_r)=S(B_r)-S(A_r)$, תנאי הכרחי לכך ש$\bar{D}$ הוא בעל שטח הוא $\lim_{r\to0}S(C_r)=0$.
זה גם תנאי מספיק(משמיט הוכחה)

באופן כללי, אם K קבוצה חסומה כלשהי ב$\mathbb{R}^2$ אפשר להגדיר C_r כמו קודם, כאוסף כל קבועי השריג r הפוגשים את K. אם $\lim_{r\to0}S(C_r)$ קיים ושווה 0, נאמר שK הוא בעל שטח 0

$\bar{D}$ כנ"ל(תחום סגור חסום בעל שטח). "חלוקה" של $\bar{D}$: היא:
$T=\{\bar{D}_j\,|$ תחום חלקיים של $\bar{D}$ מאותו טיפוס $\bar{D}_j\}$, $j=1,...n$

$$\boxed{S(\bar{D})=\sum_{j=1}^{n}S(\bar{D}_j)}$$

(הוכחה מושמטת)

חזרה על הגדרת האינטגרל(לפי רימן)

$\bar{D}$ כנ"ל, T חלוקה כלשהי של $\bar{D}$.
בכל $\bar{D}_j$, נבחר נק' שרירותית p_j.
f פונקציה נתונה כלשהי על $\bar{D}$
$\sigma(f,T)=\sum_{j=1}^{n}f(p_j)S(\bar{D}_j)$ נקרא סכום רימן עבור f לגבי החלוקה T.

K קבוצה. הקוטר של K הוא $d\left(K\right)=\sup\limits_{p,q\in K}d\left(p,q\right)$

אם T חלוקה, נקרא ל$\lambda\left(T\right)=\max\limits_{1\leq j\leq n}d\left(\bar{D}_j\right)$ הפרמטר של החלוקה.

$J\doteqdot\lim\limits_{\lambda(T)\rightarrow0}\sigma\left(f,T\right)$?$\exists$(כלומר זה מוגדר כאשר הוא קיים)

אם לכל $\epsilon>0$ נתון, קיים $\delta>0$ כך ש$\left|\sigma\left(f,T\right)-J\right|<\epsilon$ לכל חלוקה T של $\bar{D}$ עם פרמטר $\lambda\left(T\right)<\delta$.

אם תנאי זה מתקיים, J נקבע באופן יחיד ונקרא הגבול של $\sigma\left(f,T\right)$ כאשר $\lambda\left(T\right)\rightarrow0$.

הגבול הנ"ל(כאשר הוא קיים) נקרא האינטגרל (הכפול) של f מעל התחום $\bar{D}$, ומסמנים אותו ב$\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}s$.

כאשר הגבול הנ"ל קיים, אומרים שf אינטגרבילית(רימן) מעל $\bar{D}$.
קבוצת כל הפונקצות האינטגרביליות(רימן) מעל $\bar{D}$ תסומן ב$R\left(\bar{D}\right)$.

גישת דרבו(Darboux)

T חלוקה כנ"ל של $\bar{D}$ כנ"ל.
f חסומה על $\bar{D}$, ולכן גם על $\bar{D}_j$.

$$M_j\doteqdot\sup_{\bar{D}_j}f\qquad M\doteqdot\sup_{\bar{D}}f$$

$$m_j\doteqdot\inf_{\bar{D}_j}f\qquad m\doteqdot\inf_{\bar{D}}f$$

$$m\leq m_j\leq M_j\leq M\quad\forall j=1,...n$$

$$mS\left(\bar{D}_j\right)\leq m_jS\left(\bar{D}_j\right)\leq M_jS\left(\bar{D}_j\right)\leq MS\left(\bar{D}_j\right)$$

$$mS\left(\bar{D}\right)=m\sum_{j=1}^{n}S\left(\bar{D}_j\right)\leq\sum_{j=1}^{n}m_jS\left(\bar{D}_j\right)\leq\sum_{j=1}^{n}M_jS\left(\bar{D}_j\right)\leq M\sum_{j=1}^{n}S\left(\bar{D}_j\right)=MS\left(\bar{D}\right)$$

$\underline{\sigma}\left(f,T\right)\doteqdot\sum\limits_{j=1}^{n}m_jS\left(\bar{D}_j\right)$ - **סכום תחתון של דרבו.** $\overline{\int}_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S\doteqdot\inf\limits_{T}\overline{\sigma}\left(f,T\right)$

$\overline{\sigma}\left(f,T\right)\doteqdot\sum\limits_{j=1}^{n}M_jS\left(\bar{D}_j\right)$ - **סכום עליון של דרבו.** $\underline{\int}_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S\doteqdot\sup\limits_{T}\underline{\sigma}\left(f,T\right)$

הגדרה

f נקראת אינטגרבילית(לפי דרבו) אם $\boxed{\underline{\int}_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S=\overline{\int}_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S}$. במקרה זה, הערך המשותף נקרא האינטגרל (דרבו) של f על $\bar{D}$.

משפט דרבו

f אינטגרבילית(רימן) על $\bar{D}$ אם"ם היא אינטגרבילית(דרבו) על $\bar{D}$, ובמקרה זה האינטגרל לפי רימן מתלכד עם האינטגרל לפי דרבו.

הוכחה

כמו במשתנה אחד, בשינוי סימונים.

תוצאה(תנאי רימן לאינטגרביליות)

יהי $\bar{D}$ כנ"ל, וf חסומה על $\bar{D}$. אזי f אינטגרבילית על $\bar{D}$ אם"ם $\boxed{\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\left[\overline{\sigma}\left(f,T\right)-\underline{\sigma}\left(f,T\right)\right]=0}$

כתיבת תנאי רימן(עם ϵ וδ)

לכל $\epsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש$\overline{\sigma}\left(f,T\right)-\underline{\sigma}\left(f,T\right)<\epsilon \quad (*)$
לכל חלוקה T של $\bar{D}$ עם $\lambda\left(T\right)<\delta$.

הביטוי משמאל ל$(*)$ הוא $\boxed{\sum_{j=1}^{n}\left(M_j-m_j\right)S\left(\bar{D}_j\right)}$ התנודה של f ב$\bar{D}_j$

תכונות יסודיות של $R\left(\bar{D}\right)$

משפט

1. $R\left(\bar{D}\right)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
2. האינטגרל $f^{\in R\left(\bar{D}\right)}\to\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S$ הוא פונקציונל לינארי על $R\left(\bar{D}\right)$ השולח את 1 ל$S\left(\bar{D}\right)$($\iint\limits_{\bar{D}}1\,\mathrm{d}S=S\left(\bar{D}\right)$)
3. $mS\left(\bar{D}\right)\le\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S\le MS\left(\bar{D}\right)$ לכל $f\in R\left(\bar{D}\right)$
4. $C\left(\bar{D}\right)\subseteq R\left(\bar{D}\right)$
5. אם $f\in C\left(\bar{D}\right)$, אזי קיים $p\in\bar{D}$ כך ש$\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S=f\left(p\right)S\left(\bar{D}\right)$(משפט הערך הממוצע לאינטגרלים כפולים)
6. אם $T=\left\{\bar{D}_j\middle|j=1,...n\right\}$ חלוקה של $\bar{D}$ ו$f\in R\left(\bar{D}\right)$, אזי $\forall_j f\in R\left(\bar{D}_j\right)$ ו$\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S=\sum_{j=1}^{n}\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S$
7. אם $f,g\in R\left(\bar{D}\right)$ ו$f=g$ על D אזי $\iint\limits_{\bar{D}}g\,\mathrm{d}s=\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S$. כלומר השפה לא משפיעה - קבוצה חלקית בעלת שטח אפס אינה משפיעה על האינטגרל.

8. אם $f\in R\left(\bar{D}\right)$, $g\in C\left(\left[m,M\right]\right)$ אזי $g\circ f\in R\left(\bar{D}\right)$.

9. אם $f,g\in R\left(\bar{D}\right)$ אזי $fg\in R\left(\bar{D}\right)$.

10. אם $f\in R\left(\bar{D}\right)$, אזי $|f|$ אינטגרבילית ו$\left|\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S\right|\leq\iint\limits_{\bar{D}}|f|\,\mathrm{d}S$

הוכחה

1,2 $T=\left\{\bar{D}_j\right\}_{j=1}^{n}$ חלוקה כלשהי של $\bar{D}$. $f,g\in R\left(\bar{D}\right)$

$$a,b\in\mathbb{R},\sigma\left(af+bg,T\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(af+bg\right)\left(p_j\right)S\left(\bar{D}_j\right)=$$

$$=a\sum_{j}f\left(p_j\right)S\left(D_j\right)+b\sum_{j}g\left(p_j\right)S\left(\bar{D}_j\right)\doteqdot$$

$$\doteqdot a\sigma\left(f,T\right)+b\sigma\left(g,T\right)\xrightarrow[\lambda(T)\to0]{}a\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S+b\iint\limits_{\bar{D}}g\,\mathrm{d}s$$

זה מוכיח ש $\boxed{af+bg\in R\left(\bar{D}\right)}$. $\iint\limits_{\bar{D}}\left(af+bg\right)\,\mathrm{d}S=a\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S+b\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S$

3 (נובע מההגדרה עם סכומי רימן)

$$m\leq f\leq M$$

מונוטוניות האינטגרל:

$$mS\left(\bar{D}\right)=\iint\limits_{\bar{D}}m\,\mathrm{d}S\leq\iint\limits_{\bar{D}}f\,\mathrm{d}S\leq\iint\limits_{\bar{D}}M\,\mathrm{d}S=MS\left(\bar{D}\right)$$

4 נראה שתנאי רימן מתקיימים עבור f רציפה על $\bar{D}$.
יהי $\epsilon>0$ נתון. כיוון שf רציפה בתחום הסגור והחסום $\bar{D}$, שהיא קב' קומפקטית(!). לכן, לפי משפט, f רציפה במידה שווה על $\bar{D}$. ז"א קיים $\delta>0$ כך ש$|f\left(p\right)-f\left(p'\right)|<\frac{\epsilon}{S\left(\bar{D}\right)}$ לכל שתי נקודות $p,p'\in\bar{D}$ שעבורן $d\left(p,p'\right)<\delta$.
תהי $T=\left\{\bar{D}_j\right\}$ חלוקה כלשהי של $\bar{D}$ עם $\lambda\left(T\right)<\delta$. M_j הוא הסופרימום של f על $\bar{D}_j$, שהוא קומפקטי, כיוון שf רציפה על הקבוצה הקומפקטית $\bar{D}_j$, הסופרימום הנ"ל מתקבל בנק' p_j ב$\bar{D}_j$, וכן m_j מתקבל בנק' p'_j של $\bar{D}_j$.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(M_j-m_j\right)S\left(\bar{D}_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left[f\left(p_j\right)-f\left(p'_j\right)\right]S\left(\bar{D}\right)\leq...$$

$$\left(d\left(p_j, p_j'\right) \le d\left(\bar{D}_j\right)\right) \le \lambda\left(T\right) < \delta$$

$$... \le \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{S\left(\bar{D}\right)} S\left(\bar{D}_j\right) = \frac{\epsilon}{S\left(\bar{D}\right)} \overbrace{\sum_{j=1}^{n} S\left(\bar{D}_j\right)}^{=S\left(\bar{D}\right)}$$

כלומר f מקיימת את תנאי רימן לאינטגרביליות על $\bar{D}$, ולכן $f \in R\left(\bar{D}\right)$.