

יריעות עם שפה

דוגמה

D דיסק פתוח $x^2 + y^2 < 1$ (עיגול פתוח).
 \bar{D} דיסק סגור $x^2 + y^2 \leq 1$
 $\partial D = S^1$ - שפת הדיסק $x^2 + y^2 = 1$
עבור n כללי - $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

- D יריעה 2-מימדית
- \bar{D} יריעה 2-מימדית עם שפה
- ∂D יריעה 1-מימדית

מקרים חשובים

- γ עקומה עם שפה.

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

השפה של γ היא קבוצה עם שני איברים

$$\partial\gamma = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$$

- משטח עם שפה, S - נגיד חצי ספירה - אז השפה היא עקומה, קו המשווה.
- M גוף תלת מימדי עם שפה. (כלומר מלא בפנים) השפה היא הקליפה.

באופן כללי

M יריעה k ממדית עם שפה $\Leftrightarrow \partial M$ יריעה k ממדית ללא שפה.

הגדרה פורמלית

לכל נקודה $x \in M$ קיימת סביבה U_x הדומה לאחת מהבאות:

- (i) קבוצה פתוחה $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $\Omega \simeq (0, 1)^k$
- (ii) קבוצה "חצי פתוחה" $\tilde{\Omega} \simeq \underbrace{(0, 1) \times \dots \times (0, 1)}_{k \text{ elements}} \times (0, 1]$

¹ - הומויאומורפיזם, פונקציה חח"ע ועל ששומרת על טופולוגיה.

דוגמה

טבעת ב- \mathbb{R}^2 עם רדיוס פנימי 3 ורדיוס חיצוני 6.
פרמטריזציה אחת היא

$$\varphi : [3, 6] \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

הערה: זה לא אטלס - בשביל שזה יהי אטלס צריך לסגור את הרווח ש- $(0, 2\pi)$ משאיר ב- $0 \equiv 2\pi$, עם מפה אחרת.

פרמטריזציה של השפה נקבל ע"י:

$$\gamma_1(\theta) = (6 \cos \theta, 6 \sin \theta)$$

$$\gamma_2(\theta) = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta)$$

בעיה: לא התייחסנו לאוריינטציה!
אף פעם לא נבחר אוריינטציה לשפה ∂M "סתם". ניקח פרמטריזציה המושרית מזו של היריעה.

אוריינטציה מושרית

נניח שיש אוריינטציה על M (אוריאנטבילית) \Leftrightarrow קיימת בחירה של מחלקת שקילות של בסיסים של T_p .
נניח ש- $(b_1, \dots, b_k)_p$ בסיס מייצג בנקודות שעל השפה, ∂M . נבחר נציג(אולי שונה מ- b המקורי) של מחלקת השקילות כך שהווקטור הראשון הוא נורמל חיצוני ליריעה

$$(n, n_1, n_2, \dots, n_{k-1}) \sim (b_1, \dots, b_k)$$

נזרוק את n , ונאמר שהבסיס (n_1, \dots, n_{k-1}) מייצג את האוריינטציה על השפה ∂M , המושרית מהאוריינטציה של M .
בדוגמה הקודמת, נניח שהטבעת נתונה עם אוריינטציה "חיובית" ב- \mathbb{R}^2 . מצא פרמטריזציה של השפה, עם אוריינטציה מושרית מהיריעה (טבעת).

פתרון

פרמטריזציה עם אוריינטציה חיובית \Leftrightarrow הנציג שלה הוא $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
 $[(b_1, b_2) = (\varphi_r, \varphi_\theta)]$

$$\varphi_r = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \varphi_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta)$$

בנקודות על המעגל החיצוני, φ_r הוא נורמל חיצוני, ולכן $\varphi_\theta = \left(\underbrace{\varphi_n}_n, \underbrace{\varphi_\theta}_{n_1} \right)$ מגדירה

אוריינטציה על המעגל.

בנקודות על המעגל הפנימי, $-\varphi_r$ הוא נורמל חיצוני, ולכן נבחר בסיס מייצג כך שהוקטור

$-\varphi_r$ הוא ראשון. ברור ש $(\varphi_r, \varphi_\theta) \sim \left(\underbrace{-\varphi}_n, \underbrace{-\varphi_\theta}_n \right)$ כי מטריצת המעבר היא $A =$

$$A \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_n \\ -\varphi_\theta \end{pmatrix}, \det A > 0, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אם נזרוק את הנורמל $(-\theta_r)$ נקבל אוריינטציה בכיוון השעון.

נסיק: γ_1 משרה אוריינטציה מתאימה בעוד ש γ_2 לא וצריכים להפוך כיוון.