מבחן מועד א' – מבוא לאלגברה לינארית 1 למורים –88-613 – 01/02/22

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 30 נק', ענו על כל השאלות.

1. z_A, z_B, z_C הם שלושה מספרים מרוכבים שונים המייצגים את הנקודות A, B, C בהתאמה במישור גאוס.
נתון כי $|z_A| = |z_B| = |z_C| = \sqrt{65}$, הנקודה A נמצאת ברביע הראשון, וכן z_A, z_C מקיימים את המשוואה
$$(8-i)z = (8+i)\bar{z}$$
א. מצאו את z_A, z_C

נתון כי שתי הנקודות z_A, z_C מקיימות את המשוואה

$$(8-i)z = (8+i)\bar{z}$$

נכפול את שני האגפים ב$(8+i)$

$$65z = (8+i)^2\bar{z}$$

נכפול את שני האגפים בz

$$65z^2 = (8+i)^2|z|^2$$

עבור $z = z_A, z_C$ מתקיים כי $|z|^2 = 65$ ולכן סה"כ

$$z^2 = (8+i)^2$$

ולכן

$$z = \pm(8+i)$$

כיוון שA ברביע הראשון מתקיים כי

$$z_A = 8+i$$
$$z_C = -8-i$$

נתון בנוסף כי $AB = BC$

ב. מצאו את שתי האפשרויות לz_B

נסמן $z_B = a + bi$

נתון כי

$$|z_B - z_A| = |z_B - z_C|$$

לכן

$$|z_B - z_A|^2 = |z_B - z_C|^2$$

$$(a-8)^2 + (b-1)^2 = (a+8)^2 + (b+1)^2$$

$$a^2 - 16a + 64 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + 16a + 64 + b^2 + 2b + 1$$

$$-32a = 4b$$
$$-8a = b$$

כמו כן ידוע כי $|z_B| = 65$ ולכן $a^2 + b^2 = 65$

$$a^2 + 64a^2 = 65$$

$$a^2 = 1$$

$$a = \pm 1$$
$$b = -8a$$

ולכן שתי האפשרויות הן

$$z_B = \pm(1 - 8i)$$

הערה: ניתן היה להגיע לכאן באופן גאומטרי. A, C נמצאות על אותו קוטר של המעגל ברדיוס $\sqrt{65}$ סביב ראשית הצירים.

כיוון B על המעגל, וזוית מרכזית הנשענת על הקוטר היא ישרה, וכיוון ש $AB = BC$ נוצר משולש ישר זוית ושווה שוקיים, וחוצה הזוית שלו הוא הרדיוס שמאונך לקוטר.

נתון בנוסף כי B נמצאת ברביע השני

ג. a_n היא סדרה הנדסית בה $a_1 = z_A$ וכן $a_2 = z_B$.
נתון כי $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 0$, הוכיחו כי m מתחלק ב4 ללא שארית

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_n = a_1 q^{n-1}$ עבור q קבוע, ומתקיים כי $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = a_1 \cdot \frac{1-q^m}{1-q}$.

כיוון ש B ברביע השני, מתקיים כי

$$z_B = -1 + 8i$$

נמצא את מנת הסדרה ההנדסית

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{-1 + 8i}{8 + i} = \frac{(-1 + 8i)(8 - i)}{65} = \frac{-8 + i + 64i + 8}{65} = i$$

אכן $1 - i^m = 0$ אם ורק אם m מתחלק ב4 ללא שארית.

2. יהיו $a, t \in \mathbb{R}$ פרמטרים, ונביט במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + z = -a^2 \\ x + (a-t)y + (1+a)z = 0 \\ tx + 2tz = t^2 - ta^2 \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטרים האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -a^2 \\ 1 & a-t & 1+a & 0 \\ t & 0 & 2t & t^2 - ta^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - tR_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & a-t & a & a^2 \\ 0 & 0 & t & t^2 \end{pmatrix}$$

אם $t \neq 0$ וכן $a \neq t$ יש פתרון יחיד.

אם $t = 0$ יש אינסוף פתרונות.

אם $t \neq 0$ וכן $a = t$ נקבל כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ושוב נקבל אינסוף פתרונות.

ב. עבור $t = 1, a = 1$, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y = t, z = 1$$
$$x = -2$$

$$(-2, t, 1) = (-2,0,1) + t(0,1,0)$$

ג. מצאו ערכים של a, t עבורם $(1,1,-1)$ הוא פתרון של המערכת

נציב את

$$x = y = 1, z = -1$$

במערכת המשוואות ונקבל כי $a = t = 0$

3. נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

א. מצאו בסיסים ומימדים לשלושת מרחבי המטריצה $C(A), R(A), N(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$R(A) = span\{(1,0,-1),(0,1,2)\}$$

$$C(A) = span\{(1,4,7),(2,5,8)\}$$

עבור $N(A)$ נציב $z = t$ ונקבל את הפתרון הכללי

$$x = t, y = -2t, z = t$$

$$(t, -2t, t) = t(1,-2,1)$$

$$N(A) = span\{(1,-2,1)\}$$

והמימדים הם

$$\dim R(A) = \dim C(A) = 2$$
$$\dim N(A) = 1$$

ב. מצאו בסיס ל$C(A) \cap R(A)$

נעבור לצורה אלגברית

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 2 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z + x - 2y \end{array}\right)$$

כלומר

$$R(A)=\{(x,y,z)|x-2y+z=0\}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&|&x\\4&5&|&y\\7&8&|&z\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&|&x\\0&-3&|&y-4x\\0&-6&|&z-7x\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&|&x\\0&-3&|&y-4x\\0&0&|&z+x-2y\end{pmatrix}$$

כלומר

$$C(A)=\{(x,y,z)|x-2y+z=0\}$$

רואים כי $C(A)=R(A)$ ולכן $R(A)\cap C(A)=R(A)$

4. נביט בתתי המרחבים

$$U=\{(x,y,z)|x+y-z=0\}$$
$$W=span\{(1,2,2),(0,2,1),(2,2,3)\}$$

א. מצאו בסיסים ומימדים ל-U,W

עבור U

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$y=t,z=s$$
$$x=-t+s$$

$$(-t+s,t,s)=t(-1,1,0)+s(1,0,1)$$

$$u=span\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$$

כלומר $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$ הוא הבסיס ל-U והמימד הוא 2.

עבור W

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\2&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$W=span\{(1,2,2),(0,2,1)\}$$

כלומר $\{(1,2,2),(0,2,1)\}$ הוא הבסיס ל-W והמימד הוא 2.

ב. מצאו בסיס ומימד ל-$U\cap W$

נעביר את W לצורה אלגברית

$$\begin{pmatrix}1&0&|&x\\2&2&|&y\\2&1&|&z\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&|&x\\0&2&|&y-2x\\0&1&|&z-2x\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&|&x\\0&0&|&y+2x-2z\\0&1&|&z-2x\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&|&x\\0&1&|&y-2x\\0&0&|&y+2x-2z\end{pmatrix}$$

$$W=\{(x,y,z)|2x+y-2z=0\}$$

ולכן

$$U\cap W=\left\{(x,y,z)|\begin{matrix}x+y-z=0\\2x+y-2z=0\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 1 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$z = t$$
$$y = 0$$
$$x = t$$

$$(t, 0, t)$$

$$U \cap W = span\{(1,0,1)\}$$

ג. מצאו את נקודת החיתוך בין הישר $U \cap W$ שמצאתם בסעיף ב', ובין המישור $x - y + z = 1$

צריך למצוא פתרון למערכת המשוואות

$$x + y - z = 0$$
$$2x + y - 2z = 0$$
$$x - y + z = 1$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & | & 0\\2 & 1 & -2 & | & 0\\1 & -1 & 1 & | & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & | & 0\\0 & -1 & 0 & | & 0\\0 & -2 & 2 & | & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2}\\0 & 1 & 0 & | & 0\\0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

הנקודה היא

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$