מבנים אלגבריים תרגול 11

8 ביוני 2021

1 חילוק פולינומים

עבור $a(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 3, b(x) = x^2 + 2x - 3$ בצעו חילוק ארוך ומצאו q, r כך ש־ $a = bq + r$ עבור $\deg r < \deg b$:

$$\begin{array}{c|c} q(x) = x+2 & \\ \hline x^3+4x^2+2x-3 & x^2+2x-3 \\ x^3+2x^2-3x & \\ \downarrow & \\ 2x^2+5x-3 & \\ 2x^2+4x-6 & \\ \downarrow & \\ r(x) = x+3 & \end{array}$$

ולכן:

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x)$$

$$x^3 + 4x^2 + 2x - 3 = (x+2)(x^2+2x-3) + x + 3$$

2 אידאלים

הגדרה: יהי R חוג, ויהי $I \leq R$ ת"ח. I ייקרא אידאל אם:

$$\forall i \in I, r \in R : ri, ir \in I$$

תרגילים:

1. נתבונן ב־

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

(א) האם $I \trianglelefteq R$?

פתרון: כן, קל לראות ש־ I חבורה חיבורית, כי מחברים איבר איבר. לגבי בליעה:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 + a_2 b_3 \\ 0 & 0 & a_4 b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

וכן:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 a_4 & b_1 a_5 + b_2 a_6 \\ 0 & 0 & b_3 a_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

(ב) האם $I \trianglelefteq \mathbb{R}^{3\times 3}$?

פתרון: לא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & b_1 & \\ & & \end{pmatrix} \notin I$$

2. יהי R חוג חילופי. נסמן ב־ N את קבוצת האיברים הנילפוטנטיים:

$$N = \{r \in R \mid \exists m \in \mathbb{N} : r^m = 0\}$$

הוכיחו: $N \trianglelefteq R$.

פתרון: בשיעורי הבית עליכם להוכיח סגירות לחיבור של נילפוטנטיים בחוג חילופי. (0 ברור ניל' וכן הנגדי ניל')

לגבי בליעה: נניח $a \in N, r \in R$ אז נקבל שיש $m \in \mathbb{N}$ כך ש־ $a^m = 0$, ואז:

$$(ar)^m = (ra)^m = r^m a^m = r^m \cdot 0 = 0$$

כאשר שני המעברים הראשונים נובעים מחילופיות.

3. יהי R חוג, ויהי $I \trianglelefteq R$ אידאל. הוכיחו: $I[x] \trianglelefteq R[x]$.

פתרון: לדוגמא $2\mathbb{Z}[x] \trianglelefteq \mathbb{Z}[x]$. לגבי תת־חוג: מכיון שנתון ש־ I אידאל הוא בפרט חוג, ולכן $I[x]$ הוא חוג, ככל חוג פולינומים.

לגבי בליעה: יהיו $a(x) \in I[x], b(x) \in R[x]$. נרשום:

$$a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in I$$

$$b(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, b_i \in R$$

נקבל:

$$a(x) \cdot b(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} \underbrace{a_i b_{k-i}}_{\in I} \right) x^k$$

וקיבלנו פולינום שהמקדם של x^k הוא סכום של איברים ב־ I, ולכן איבר ב־I. באותו אופן:

$$b(x)a(x) == \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} \underbrace{b_i a_{k-i}}_{\in I} \right) x^k$$

וקיבלנו פולינום שהמקדם של x^k הוא סכום של איברים ב־ I, ולכן איבר ב־I. קיבלנו בליעה ולכן $I[x]$ אידאל.