אנליזה מודרנית 1 - תרגול 11

7 בינואר 2015

תרגיל:

יהי $\Omega = [0,1]$, m מידת לבג. עבור f מדידה וחסומה כב"מ מתקיים.

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

הוכחה

לפי ההגדרה

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dm\right)^{1/p} \le \left(\int_\Omega (\|f\|_\infty)^p \, dm\right)^{1/p}$$

המעבר נובע מכך $|f| \overset{a.e}{<} \|f\|_\infty$ וכן $x^{1/p}$ עולה.

$$\begin{aligned} &= \left(\|f\|_\infty^p \int_\Omega 1^p dm\right)^{1/p} = \|f\|_\infty \\ \Rightarrow \limsup_p \|f\|_p &\le \|f\|_\infty \end{aligned}$$

מצד שני, יהא $\varepsilon > 0$ ונגדיר

$$\begin{aligned} E_\varepsilon : &= \{f > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \subseteq \Omega \\ \|f\|_p &= \left(\int_\Omega |f|^p \, dm\right)^{1/p} \\ &\ge \left(\int_{E_\varepsilon} |f|^p \, dm\right)^{1/p} \\ &\ge \left(\int_{E_\varepsilon} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \, dm\right)^{1/p} = (\|f\|_\infty - \varepsilon) \underbrace{m(E_\varepsilon)^{1/p}}_{\downarrow p\to\infty \; \|f\|_\infty - \varepsilon} \end{aligned}$$

$1 > m(E_\varepsilon) \ngeq 0$ כי אם $m(E_\varepsilon) = 0$ אזי לפי הגדרת $\|f\|_\infty$

$$\|f\|_\infty \le \|f\|_\infty - \varepsilon$$

סתירה! זאת נכון לכל $\varepsilon > 0$ לכן עבור $\varepsilon \to 0$ נקבל

$$\liminf_{p} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

ובסה"כ

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

תרגיל

עבור אילו ערכי $p > 0$ הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ שייכת ל:

1. $\Omega_1 = L^1([0,1])$.
2. $\Omega_2 = L^p([1,\infty))$.
3. $\Omega_3 = L^p([0,\infty))$.

פתרון

.1

$$\begin{aligned} I_1 &= [0,1] \\ \left(\|f\|_p\right)^p &= \int_0^1 \frac{1}{|x|^p} dm \\ &= \begin{cases} \text{finite} & p<1 \\ \infty & p \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ומכאן $f \in L^p([0,1]) \Leftrightarrow p < 1$.

הערה: לא הרחבנו את הדיבור על $p < 1$ כיוון שבמקרה זה L^p אינו מרחב נורמי (לא מתקיים אי"ש מינקובסקי).

2. $I_2 = [1,\infty)$

$$\|f\|_p^p = \int_1^\infty \frac{1}{|x|^p} dx = \begin{cases} \text{finite} & p>1 \\ \infty & p \leq 1 \end{cases}$$

מכאן

$$f \in L^p([1,\infty)) \Leftrightarrow p > 1$$

3. $I_3 = [0,\infty)$. לפי אדיטיביות האינטגרל

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

לכן עבור I_3

$$f \in L^p(I_3) \Leftrightarrow f \in L^p(I_1), f \in L^p(I_2)$$

אבל לפי התוצאות הקודמות אין p כזה. $\forall p > 0, f \notin L^p(I_3)$.

תרגיל:

הוכיחו כי אם $1 \le r < p < \infty$, $I = [0,1]$ אזי

$$L^p(I) \subsetneq L^r(I)$$

הוכחה:

נניח $f \in L^p(I) \Leftrightarrow \|f\|_p^p < \infty$ כלומר $\int |f|^p \, dm < \infty$. נגדיר $E := \{|f| \le 1\} \subset I$ אזי

$$\int_{E^c} |f|^r \, dm \le$$

$1 \le r < p$, $|f| > 1$ על E^c (a^x עולה עבור $a > 1$)

$$\le \int_{E^c} |f|^p \, dm \le$$

לפי מונטוניות ה$\int$ לגבי הקבוצה

$$\le \|f\|_p^p < \infty$$

וגם

$$\int_E |f|^r \, dm \underset{|f|\le 1}{\le} \int_E 1 dm = m(E) \le 1$$

בסה"כ

$$\|f\|_r^r = \int_{I = E \sqcup E^c} |f|^r \, dm < \infty$$

$\Leftarrow$ $f \in L^1(I)$ עד כאן הוכחנו הכלה. נוכיח הכלה ממש. ניקח לדוגמה

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/p}$$

אזי

$$f \notin L^p(I)$$

אבל

$$f \in L^r(I)$$

(לפי התרגיל הקודם).

תרגיל:

נניח ש$1 \le p < \infty$. הראו כי עבור $f \in L^p\left((0,\infty)\right)$, $\alpha > 0$ מתקיים

$$m\left(\left\{f > \alpha \left\|f\right\|_p\right\}\right) \le \frac{1}{\alpha^p}$$

הוכחה

נסמן $A = \left\{f > \alpha \left\|f\right\|_p\right\}$ אם $f \equiv 0$ כב"מ אז האי"ש טריוויאלי. אחרת: אם $f(x) \ge \alpha \left\|f\right\|_p$ אזי

$$f(x)^p \ge \alpha^p \int_0^\infty \left|f(x)\right|^p dx$$

נסמן $B = \left\{f^p \ge \alpha^p \left\|f\right\|_p^p\right\}$ אזי $A \subseteq B$. כעת

$$\begin{aligned} \infty &> \left\|f\right\|_p^p = \int_0^\infty \left|f(x)\right|^p dx \overset{\text{monotonicity}}{\ge} \int_B \left|f(x)\right|^p dx \ge \alpha^p \left\|f\right\|_p^p m(B) \\ m(B) &\le \frac{1}{\alpha^p} \end{aligned}$$

$A \subseteq B$ ולכן $m(A) \le m(B) \Leftarrow m(A) \le \frac{1}{\alpha^p}$ כנדרש.

תרגיל:

יהא (Ω, S, μ) מרחב מידה. הוכח/הפרך:

1. $f_n \xrightarrow{L_1} f \Leftarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$.
2. $f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftarrow f_n \xrightarrow{L_1} f$.

פתרון:

1. נוכיח : יהיה $\varepsilon > 0$.

$$0 \underset{\infty \leftarrow n}{\leftarrow} \left\|f_n - f\right\|_{L^1} = \int_\Omega \left|f_n - f\right| d\mu \ge \varepsilon \mu\left(\left\{\left|f_n - f\right| > \varepsilon\right\}\right)$$

לכן

$$0 \underset{\infty \leftarrow n}{\leftarrow} \mu\left(\left\{\left|f_n - f\right| > \varepsilon\right\}\right)$$

כלומר

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

2. הטענה לא נכונה. נגדיר $([0,1],S,m)$ ו $f_n(x)=n\mathbb{1}_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$. אזי

$$\begin{aligned}\forall x,\quad f_n(x) &\to 0\\ \Rightarrow f_n &\overset{m}{\to} 0\end{aligned}$$

אולם

$$\|f_n-0\|_{L^1}=\int|f_n|\,dm=n\cdot m\left(\left(0,\frac{1}{n}\right)\right)=1$$

כלומר

$$\|f_n-0\|_{L^1}\not\to 0\Leftrightarrow f_n\overset{L^1}{\not\to}0$$

תרגיל:

חשבו

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty\frac{\sin^n x}{x^2}dx$$

פתרון:

נגדיר סידרה $f_n(x)$ להיות סידרת הפונקציות

$$f_n(x):=\frac{\sin^n x}{x^2}$$

נשים לב כי:

- f_n מדידות (לכן רציפות כב"מ).
- $|f_n(x)|\le\frac{1}{x^2}\in L^1((1,\infty))$ - הסידרה נשלטת ע"י פו' אינטג'.
- $f_n(x)\overset{a.e}{\to}0$ מלבד קבוצה בת מנייה - $\left\{\pi k+\frac{\pi}{2}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ (כידוע יש לה מידה 0).

לכן לפי ההתכנסות הנשלטת (הדומיננטית) נקבל ש

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty f_n=\int_1^\infty\lim_{n\to\infty}f_n=\int_1^\infty 0=0$$

תרגיל:

נתון ש$f\in L^1([0,1])$ הוכיחו שקיים M כך ש

$$\int_{\{f>M\}}f(t)\,dt<\frac{1}{2015}$$

פתרון:

נסמן $A_n := \{f > n\}$ וכן

$$\begin{aligned} A_n &\subseteq B_n := \{|f| > n\} \\ \alpha &:= \|f\|_{L^1([0,1])} = \int_0^1 |f(t)|\, dt \end{aligned}$$

הקבוצות הן מדידות כיוון וf מדידה. כעת לפי אי"ש צ'בישב

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \mathbb{1}_{B_n} dm = m(B_n) = m(\{|f| > n\}) \le \frac{\|f\|_{L^1}}{n} = \frac{\alpha}{n}$$

נבחר n_0 מספיק גדול כך ש:

$$\frac{\alpha^2}{n_0} < \frac{1}{2015}$$

נקבל עבור $M := n_0$

$$\int_{\{f>M\}} f(t)\, dt = \int_{A_M} f dm \le \int_{B_M} |f|\, dm = \int_0^1 |f|\, \mathbb{1}_{B_M} dm \le \|\mathbb{1}_{B_M}\| \cdot \int_0^1 |f|\, dm \le \frac{\alpha^2}{M} < \frac{1}{2015}$$

תרגיל:

יהיו $0 < p, q \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dm = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p+nq}$$

הוכחה

יהי $x \in (0,1)$ אזי הטור ההנדסי שמחליף את סימניו מוגדר ע"

$$\frac{1}{1+x^q} = 1 - x^q + x^{2q} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{nq}$$

אך טור זה לא מתכנס בהחלט ולכן יש להעזר לא ישירות במשפט ההתכנסות המונטוניות ש(מיועד למקרים שכנ"ל).

$$\Rightarrow \frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{nq+p-1} \qquad (*)$$

הטור $(*)$ מתכנס , לכן:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{2nq+p-1} - x^{(2n+1)q+p-1} \right) \ge 0$$

וזה טור שמתכנס בהחלט. זוהי פונקציה רציפה ולכן מדידה לבג $(0,1)$ לאי שליליים לכן לפי משפט ההתכנסות המונטונית גירסת הטור.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dm &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 \underbrace{\left(x^{2jq+p-1} - x^{(2j+1)q+p-1}\right)}_{\text{reimann integral}} dm \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{2jp+p-1} - x^{(2j+1)q+p-1}\right) dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{p+2jq}}{p+2jq}\bigg|_0^1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{(2j+1)q+p-1}}{p+(2j+1)\,q}\bigg|_0^1 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2jq} - \frac{1}{p+(2j+1)\,q}\right) \\
&= \underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p+nq}}
\end{aligned}$$

המעבר האחרון מוצדק כיוון והטור מימין מתכנס לייבניץ.