

תרגיל 4- מתמטיקה בדידה תש"ף

שאלה 1. הוכיחו את כלל דה מורגן, כלומר,  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ,

שאלה 2. הוכיחו או הפריכו את הבאים:

$$A \subseteq B \Rightarrow A^c \supseteq B^c \quad (1)$$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \quad (2)$$

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \quad (3)$$

$$A \subseteq \mathcal{P}(A) \Rightarrow A \cap \mathcal{P}(A) \neq \emptyset \quad (4)$$

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) \quad (5)$$

שאלה 2. תהי  $\mathcal{U}$  קבוצה אוניברסלית. עבור מספר  $m$  טבעי וקבוצות  $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{U}$  נגדיר את הקבוצה הבאה:

$$\mathbf{X} := \{X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_m \mid \forall 1 \leq i \leq m (X_i = A_i) \vee (X_i = \mathcal{U} \setminus A_i)\}$$

הראו כי עבור  $B_1, B_2 \in \mathbf{X}$  מתקיים:  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

שאלה 3. הוכח באינדוקציה (או בכל דרך אחרת) כי לכל  $n$  טבעי אי-זוגי מתקיים כי:

$$24 \mid (n^3 - 25n)$$

כאשר הסימן:  $m \mid n$  אומר כי  $n$  מחלק את  $m$ .

שאלה 4. האם ניתן להכליל את "זהות דה מורגן"?

כלומר האם לכל  $n \geq 2$  טבעי וקבוצות  $A_1, A_2, \dots, A_n$  התוצאה הבא מתקיימת:

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c = (A_1)^c \cup (A_2)^c \cup \dots \cup (A_n)^c$$

האם גם הזהות השנייה מתקיימת? אם כן הראו זאת, אם לא מצאו דוגמא נגדית.

שאלה 5. הוכיחו כי לכל  $n \in \mathbb{N}$  שונה מאפס וקבוצות:  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , מתקיים כי:

$$A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n = \{x : x \text{ belongs to odd number of sets among } A_1, A_2, \dots, A_n\}$$