אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 5

26 בנובמבר 2018

1. מצאו את תחום הרציפות של הפונקציות הבאות (כלומר, באיזה נק' הן רציפות ובאיזה לא):

(א) $f(z) = \frac{\overline{z}}{z}$

(ב) $f(a+bi) = \frac{a^3b}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{i}$

(ג) $f(z) = \frac{z-2\overline{z}}{z+2\overline{z}}$

(ד) $f(z) = \frac{Re(z)(z+\overline{z})}{z}$

<u>פתרון:</u>

א. כמובן, לכל $z \neq 0$ הפונקציה רציפה כמנת רציפות. נבדוק מה קורה באפס: נפרק את הפונקציה לU, V:

$$f(a+bi) = \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a^2-b^2-2abi}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{-2ab}{a^2+b^2}i$$

כעת, $U = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, V = \frac{-2ab}{a^2+b^2}$. נראה ש-$U$ איננה רציפה: אם נקבע את $a_n = 0$ וניקח את הסדרה $b_n = \frac{1}{n}$ למשל, אז נקבל

$$\frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n^2 + b_n^2} = \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = -1 \to -1$$

אבל אם נעשה הפוך, נקבע את $b_n = 0$ וניקח למשל את הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ אז נקבל:

$$\frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n^2 + b_n^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \to 1$$

קיבלנו גבולות שונים, ולכן הפונקציה U לא רציפה באפס, ולכן גם הפונקציה f לא רציפה באפס.

ב. כאן כבר (כמעט) מחולק מראש לפונקציות $U = \frac{a^3b}{a^2+b^2}, V = -2ab$ (לגבי V: זה נובע מהעובדה ש $\frac{1}{i} = -i$, וככה נפטרנו מהשבר. שתי הפונקיציות רציפות בכל נקודה:

הפונקציה V זה מכפלת רציפות.

הפונקציה U: בכל $a+bi\neq 0$ נקבל רציפות כמנת רציפות. נראה שבאפס הגבול הוא אפס: לכל שתי סדרות $a_n\to 0, b_n\to 0$ מתקיים:

$$\left|\frac{a_n^3b_n}{a_n^2+b_n^2}-0\right|=\left|\frac{a_n^3b_n}{a_n^2+b_n^2}\right|\leq\left|\frac{a_n^3b_n}{a_n^2}\right|=|a_nb_n|\to 0$$

כאשר השאיפה בסוף נובעת מכך ששתי הסדרות שואפות לאפס.

ג. גם כאן ניתן לראות שהבעייה היחידה היא כאשר $z=0$, ובשאר המקומות זו מנת רציפות. נפרק את הפונקציה:

$$f(a+bi)=\frac{a+bi-2a+2bi}{a+bi+2a-2bi}=\frac{-a+3bi}{3a-bi}=\frac{(-a+3bi)(3a+bi)}{(3a-bi)(3a+bi)}=$$

$$=\frac{-3a^2-3b^2+8abi}{9a^2+b^2}=\frac{-3(a^2+b^2)}{9a^2+b^2}+\frac{8ab}{9a^2+b^2}i$$

נראה שV לא רציפה: אם ניקח סדרות שוות $a_n=b_n$ נקבל $\frac{8a_n^2}{10a_n^2}\to\frac{8}{10}$, ואם ניקח סדרות נגדיות $a_n=-b_n$ נקבל $\frac{-8a_n^2}{10a_n^2}\to-\frac{8}{10}$. קיבלנו גבולות שונים, ולכן הפונקציה V לא רציפה באפס, ולכן הפונקציה f לא רציפה באפס.

ד. נשים לב ש $z+\overline{z}=2Re(z)$, ולכן הפונקציה היא:

$$f(a+bi)=\frac{3a^2}{a+bi}=\frac{3a^2(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{3a^3}{a^2+b^2}+\frac{-3a^2b}{a^2+b^2}i$$

שוב, בכל $z\neq 0$ הפונקציה רציפה כמנת רציפות. נראה ששתי הפונקציות U,V רציפות באפס. בשתיהן הגבול הוא אפס: לכל שתי סדרות $a_n\to 0, b_n\to 0$ מתקיים:

$$\left|\frac{3a_n^3}{a_n^2+b_n^2}-0\right|=\left|\frac{3a_n^3}{a_n^2+b_n^2}\right|\leq\left|\frac{3a_n^3}{a_n^2}\right|=|3a_n|\to 0$$

וכמו כן:

$$\left|\frac{-3a_n^2b_n}{a_n^2+b_n^2}-0\right|=\left|\frac{-3a_n^2b_n}{a_n^2+b_n^2}\right|\leq\left|\frac{-3a_n^2b_n}{a_n^2}\right|=|-3b_n|\to 0$$

בהצלחה!