

## לינארית 1 - תרגיל 9 - תאורטי 3

להגשה בשבוע של ה-24.12.17

**תרגיל 1.** האם  $V$  הוא תת מרחב של  $\mathbb{R}^3$

$$1. V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z^2 \geq x^2 + y^2 \right\}$$

$$2. V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2^{3x+z} = 8^{2x-y} \right\}$$

**תרגיל 2.** עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם הנפרש שווה לקבוצה שאליו משויים. אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים.

$$1. \mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} \text{span} \{ (2 \ 0 \ 4), (0 \ 1 \ 0), (6 \ 5 \ 12) \}$$

$$2. \mathbb{R}_3[x] \stackrel{?}{=} \text{span} \{ 1, x + x^2, 4x^3 + x^2, 2x \}$$

$$3. \mathbb{R}^{2 \times 2} \stackrel{?}{=} \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

**תרגיל 3.**

הצג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$

כצירוף ליניארי של המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**תרגיל 4.**

יהי  $V = \mathbb{R}_3[x]$  מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-3, ותהי

$$U = \{ p(x) \in V \mid p(x) = x \cdot p'(x) \}$$

תת קבוצה של  $V$ . ( $p'(x)$  היא הנגזרת של  $p(x)$ )

1. הוכיחו ש- $U$  תת מרחב של  $V$ .

2. מצאו בסיס ומימד ל- $U$ .

**תרגיל 5.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

חשבו

1.  $R(A)$

2.  $C(A)$

3.  $N(A)$

4.  $R(B)$

5.  $C(B)$

6.  $N(B)$

**תרגיל 6.** נתונים הווקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. השלימו את  $\{v_1, v_2\}$  כך שיהיה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$

2. מצאו בסיס ל- $Sp\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$  והשלימו אותו לבסיס ל- $\mathbb{R}^3$ .

**תרגיל 7.** תהי מטריצה  $A \in M_{4 \times 8}(\mathbb{R})$  כך ש- $Rank(A) = 4$

1. האם שורות  $A$  תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

2. האם עמודות  $A$  תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

3. למה שווה  $dim(N(A))$ ?

**תרגיל 8.** יהיו  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ו- $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. הוכיחו שאוסף כל הווקטורים ב- $\mathbb{R}^4$  האורתוגונלים לשני הווקטורים האלו הוא תתי מרחב של  $\mathbb{R}^4$ .

2. מצאו בסיס לתת מרחב הזה.

**תרגיל 9.** נתונים  $v, u, w$  אורתונורמלים חשבו את  $\|3v + u - 2w\|^2$

**תרגיל 10.** יהיו  $x, y \in V / \{0\}$  נגדיר  $u = x - \frac{\langle x, y \rangle y}{\|y\|^2}$

1. הוכיחו ש- $u$  ניצב ל- $y$  כלומר  $\langle u, y \rangle = 0$

2. הוכיחו ש- $\langle u, u \rangle = \langle u, x \rangle$

3. הראו ש- $0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \leq \langle u, u \rangle$  רמז: נשים לב ש- $0 \leq \langle u, u \rangle$

4. הסיקו את אי שוויון קושי שורץ.

**בהצלחה!!**