פתרון בוחן לינארית 2 למדמ"ח קיץ תשע"ט

ה' מנחם־אב ה'תשע"ט, 6.8.19

מרצה: תמר בר־און.
מתרגל: אריאל ויצמן.

- יש לענות על כל השאלות!
- נא לכתוב את התשובות על השאלון בלבד!
- הניקוד של כל סעיף הינו 17 נק'.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה נילפוטנטית. הוכיחו:

(א) אם B דומה ל־A אז B נילפוטנטית.

(ב) אם $A\neq 0$ אז A לא לכסינה.

(ג) לכל $0\neq\alpha\in\mathbb{F}$ המטריציה $\alpha I-A$ הפיכה.

פתרון:

קיים k כך ש־ $A^k=0$.

א. אם B דומה ל־A אז יש P הפיכה כך ש־ $P^{-1}AP=B$, ולכן: $B^k=(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP=P^{-1}0P=0$.

ב. הפולינום המינימלי של A הוא $x^t, t\leq k$ (כי לוקחים את t להיות סדר הנילפוטנטיות, ואז פולינום זה מאפס את A וכל אחד שמחלק אותו לא), מה שאומר ש־0 ע"ע יחיד. אם $A\neq 0$ אז $\dim N(A)>0$, מה שאומר שאין בסיס מוקטורים עצמיים. לכן לא לכסינה.

ג. נב"ש שהיא לא הפיכה, אז יש $0\neq v\in\mathbb{F}^n$ כך ש־ $(\alpha I-A)v=0$, מה שאומר $Av=\alpha v$ ולכן α ע"ע של A, בסתירה לכך ש־0 ע"ע יחיד.

2. תזכורת: אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אז $|A|=|A^t|$.

(א) תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו: ל־$A$ ול־A^t יש את אותם ערכים עצמיים.

(ב) תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה שעמודותיה מסתכמות ל־$x\in\mathbb{F}$ (כלומר, $\forall i:\sum\limits_{j=1}^{n}A_{j,i}=x$). הוכיחו: x ערך עצמי של A.

פתרון:

א. λ ע"ע של A אמ"ם $|\lambda I-A|=0$ ולכן לפי התזכורת נקבל: $0=|\lambda I-A|=|(\lambda I-A)^t|=|\lambda I-A^t|$ אמ"ם λ ע"ע של A^t.

ב. נראה ש־ x ע"ע של A^t, ואז לפי סעיף קודם הוא ע"ע של A. ניקח את הוקטור $v=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ ונקבל: $\forall i: R_i(A^tv)=\sum\limits_{j=1}^{n}A^t_{i,j}v_j=\sum\limits_{j=1}^{n}A^t_{i,j}=x$, כלומר, $A^tv=\begin{pmatrix}x\\ \vdots\\ x\end{pmatrix}=xv$, ולכן x ע"ע של A^t (עם וקטור עצמי v), ולכן x ע"ע של A.

3. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת:

$$\forall j: A_{i,j}=\begin{cases}1 & i\text{ is even}\\ -1 & i\text{ is odd}\end{cases}$$

הוכיחו:

(א) A לכסינה אם ורק אם n אי־זוגי.

(ב) A ניתנת לשילוש.

פתרון:

א+ב. נשים לב שמתקיים $rank(A) = n - 1$, ולכן 0 ע"ע עם ריבוי גיאומטרי $n - 1$, לכן הפולינום האופייני הוא מהצורה $x^{n-1}(x - \alpha)$ עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ (חוץ מ־0 יכול להיות רק עוד גורם אחד, כי 0 עם ריבוי אלגברי לפחות $n-1$). קיבלנו פ"א המתפרק לגורמים לינאריים, ולכן A ניתנת לשילוש. כעת, A לכסינה אמ"ם יש בסיס מוקטורים עצמיים, ולכן במקרה שלנו אמ"ם יש עוד ע"ע נוסף $\alpha \neq 0$, אמ"ם $tr(A) = 0 \cdot (n - 1) + \alpha \neq 0$. נחשב את העקבה:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i = \begin{cases} 0 & i \text{ is even} \\ 1 & i \text{ is odd} \end{cases}$$

לכן A לכסינה אמ"ם n אי־זוגי.