אלגברה לינארית 1- תרגיל 10

הערות:

$R(\mathrm{A}) = Rspan(A) =$ מרחב השורות של מטריצה A.

לוקטורים ב-$Rspan(A)$ אנו מתייחסים כ-**וקטורי עמודה**.

$C(\mathrm{A}) = Cspan(A) =$ מרחב העמודות של מטריצה A.

$N(\mathrm{A}) = Null(A) =$ מרחב האפס של מטריצה A.

1) עבור המטריצות הבאות מצא בסיס וממד למרחבי השורות, העמודות והאפס:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נדרג: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

כפי שראינו בתרגול, שורות המטריצה המדורגת הן בסיס למרחב השורות, עמודות המתאימות לעמודות הציר הן בסיס למרחב העמודות, ומרחב הפתרונות הוא מרחב האפס, כמובן, לכן:

$$Rspan(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\},\quad Cspan(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\}$$

$$Null(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$Rspan(B) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\},\quad Cspan(B) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

$$Null(B) = span\{\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

2) נתונה $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. מצא לאילו ערכי a $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = 0,1,2,3$.

פתרון:

לאחר דירוג נקבל: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) \end{pmatrix}$.

עבור $a = 1$: יש שורה אחת שונה מ-0 ולכן $\text{rank(A)} = 1$.

עבור $a = -2$: יש שתי שורות שונות מ-0 ולכן $\text{rank(A)} = 2$.

עבור $a \neq 1, -2$: כל השורות שונות מ-0 ולכן $\text{rank(A)} = 3$.

3) תהי $A \in F^{n\times n}$ הוכח/הפרך:

א. $\text{Cspan(A)} \subseteq \text{Rspan(A)} \Leftarrow \text{Cspan(A)} = \text{Rspan(A)}$.

ב. $\text{Cspan(A)} = \text{Rspan(A)} \Leftarrow$ A הפיכה.

ג. A הפיכה $\Leftrightarrow \text{rank(A)} = \text{n}$.

ד. $Null(A) \subseteq Null(A^2)$.

פתרון:

א. נכון. $\text{Cspan(A)} \subseteq \text{Rspan(A)}$ ו- $\dim(\text{Cspan(A)}) = \text{rank(A)} = \dim(\text{Rspan(A)})$

לפי משפט מהתרגול זה אומר ש- $\text{Cspan(A)} = \text{Rspan(A)}$.

ב. לא נכון. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ג. נכון. $\text{rank(A)} = \text{n} \Leftrightarrow \dim(\text{Cspan(A)}) = n \Leftrightarrow \text{Cspan(A)} = F^n \Leftrightarrow$

לכל $1 \leq i \leq n$ יש v_i כך ש: $Av_i = e_i$ (e_i הם איברי הבסיס הסטנדרטי) $\Leftrightarrow$

קיימת מטריצה B (שעמודותיה הן v_i) כך ש- $\text{AB} = \text{I} \Leftrightarrow$ A הפיכה.

ד. נכון. $x \in Null(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A(Ax) = A0 \Rightarrow A^2x = 0 \Rightarrow x \in Null(A^2)$.

4) תהיינה $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times k}$. הוכח:

א. $\text{Rspan(AB)} \subseteq \text{Rspan(B)}$.

ב. $\text{Cspan(AB)} \subseteq \text{Cspan(A)}$.

ג. $Null(B) \subseteq Null(AB)$.

הדרכה: השתמשו בכפל שורה-שורה ועמודה-עמודה.

פתרון:

א. לפי כפל שורה-שורה: $R_i(AB) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} R_j(B)$ ולכן $R_i(AB) \in \text{Rspan(B)}$

(כי היא צ"ל בשורות B) לכל $1 \leq i \leq m$, כלומר, $\text{Rspan(AB)} \subseteq \text{Rspan(B)}$.

ב. לפי כפל עמודה-עמודה: $C_i(AB) = \sum_{j=1}^{n} b_{j_i} C_j(A)$ ולכן $C_i(AB) \in \text{Cspan(A)}$

כי היא צ"ל בעמודות A) לכל $1 \leq i \leq k$, כלומר, $\mathrm{Cspan}(AB) \subseteq \mathrm{Cspan}(A)$.

ג. $x \in Null(\mathrm{B}) \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow A(Bx) = A0 \Rightarrow (AB)x = 0 \Rightarrow x \in Null(AB)$.

5) יהיו $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ תתי-מרחבים המקיימים: $\dim(U_2) < \dim(U_3)$ ו- $U_1 + U_2 = U_1 + U_3$.

האם $\dim(U_1 \cap U_2)$ קטן, גדול או שווה ל- $\dim(U_1 \cap U_3)$?

פתרון:

לפי משפט הממדים:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$$\dim(U_1 + U_3) = \dim(U_1) + dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_3)$$

מהנתון, אגף שמאל בשתי המשוואות שווה, ולכן:

$$\dim(U_1) + dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_3) \Leftarrow$$

$$dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) = dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_3) \Leftarrow$$

$$dim(U_2) - \dim(U_3) = dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3).$$

מהנתון, $dim(U_2) < \dim(U_3)$, ולכן:

$$dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) < 0 \ \Leftarrow \ dim(U_1 \cap U_2) < \dim(U_1 \cap U_3).$$

6) יהיו $U, V, W \subseteq D$ תתי-מרחבים, הוכח/הפרך:

$$\dim(U + V + W) = \dim(U) + dim(V) + \dim(W) - \dim(U \cap V) - \dim(U \cap W)$$
$$-\dim(V \cap W) + \dim(U \cap V \cap W)$$

פתרון:

הפרכה: $\mathrm{D} = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{W} = span\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$, $\mathrm{V} = span\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$, $\mathrm{U} = span\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$,

קל לראות: $U \cap V = U \cap W = V \cap W = U \cap V \cap W = \{0\}$,

ולכן ממד כל החיתוכים הוא 0, וכן: $\dim(U) = dim(V) = \dim(W) = 1$.

לכן אגף ימין שווה 3.

מצד שני, $U + V + W = \mathbb{R}^2$, ולכן $\dim(U + V + W) = 2$.

סתירה.