תזכורת: בשיעור הקודם הגדרנו את NS להיות האידיאל של כל הקבוצות קיימת איזשהי פונקציה נורמלית שמזיזה את כל איברי הקבוצה.
הגדרנו את $club$ להיות המסנן של כל הקבוצות שמכילות סל"ח (קבוצה סגורה ולא חסומה).
הדבר האחרון שהוכחנו- הוכחנו ש$club$ הוא המסנן הדואלי של NS. כלומר,

$$A \in NS \iff A^c \in club$$

מסקנה: חיתוך בן מניה של סל"חים הוא סל"ח
הוכחה: הוכחנו בשיעור הקודם שNS הוא אידיאל סיגמא אדיטיבי, כלומר הוא סגור לאיחודים בני מניה. יהיו $\langle A_n \rangle_{n<\omega}$ אוסף בן מניה של סל"חים. אז לכל n $A_n^c \in NS$. לכן $\bigcup A_n^c \in NS$. לכן $(\bigcup A_n^c)^c \in club$. אבל זה שווה בדיוק ל$\bigcap A_n$. לכן $\bigcap A_n$ מכילה סל"ח. קבוצה שמכילה קבוצה לא חסומה- היא לא חסומה. היא סגורה כי חיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור (זה היה תרגיל).
הגדרה: קבוצה $A \subseteq \omega_1$ נקראת קבוצת שבת אם $A \in NS^+$, כלומר $A \notin NS$. כלומר, לכל פונקציה נורמלית $f : \omega_1 \to \omega_1$ קיים איזשהו $\alpha \in A$ כך ש$f(\alpha) = \alpha$.
טענה: קבוצה A היא קבוצת שבת אמ"ם היא נחתכת עם כל סל"ח באופן לא ריק.
הוכחה: $\Leftarrow$ נניח שA שבת. אז $A \in NS^+$. יהי B סל"ח, אז $B \in club = \widehat{NS}$. בהרצאה הקודמת הוכחנו שלכל אידיאל I, אם $A \in I^+$ ו$B \in \hat{I}$ אז $A \cap B \in I^+$ ובפרט הוא קבוצה לא ריקה.
נקח $I = NS$ ונקבל את הדרוש.
$\Longrightarrow$ נניח שA נחתכת עם כל סל"ח. תהי f פונקציה נורמלית. אוסף נקודות השבת של הפונקציה הוא סל"ח

$$\{\alpha : f(\alpha) = \alpha\}$$

היא סל"ח, (הראינו שאוסף נקודות השבת של פונקציה נורמלית הוא לא חסום, ובגלל שf רציפה, אפשר להראות שלכל סדרה עולה של נקודות שבת הגבול גם יהיה נקודת שבת).
A נחתכת עם הסל"ח הנ"ל, ולכן מכילה נקודת שבת.
תזכורת: במתמטיקה בדידה מראים כי לקבוצה X, תתי קבוצות $A, B \subseteq X$ ואוסף של תתי קבוצות של X, $\mathcal{A}$ מתקיים:
1. $A \subseteq B$ אמ"ם $A \setminus B = \emptyset$
2. $A = B$ אמ"ם $A \triangle B = \emptyset$
3. $\bigcup \mathcal{A}$ הוא איבר ראשון של

$$\{C | \forall A \in \mathcal{A} A \subseteq C \wedge C \subseteq X\}$$

בהקשר שלנו:
לקבוצה X, תתי קבוצות $A, B \subseteq X$ ואוסף של תתי קבוצות של X, $\mathcal{A}$, נגדיר:
1. $A \subseteq^* B$ אם $A \setminus B$ היא קבוצה בת מניה.
2. $A =^* B$ אם $A \triangle B$ היא קבוצה בת מניה. (למעשה מתקיים $A =^* B$ אמ"ם $A \subseteq^* B$ ו$B \subseteq^* A$)
3. ביחס ההכלה לקבוצה $\mathcal{A}$ היה סופרימום, כלומר איבר קטן ביותר בקבוצת חסמי המלעיל. ביחס ההכלה-כוכב, לקבוצת חסמי המלעיל של $\mathcal{A}$ אין בהכרח איבר קטן ביותר. אבל עדיין יש איברים מינימליים.
נגדיר $\bigcup^* \mathcal{A}$ להיות איבר מינימלי בקבוצת חסמי המלעיל.

אבל ניתן להוכיח (תרגיל) שכל האיברים המינימלים בקבוצת חסמי המלעיל, שווים ביחס כוכב.
כלומר, $\bigcup^* \mathcal{A}$ מוגדר עד כדי קבוצה בת מניה.

תזכורת: NS סגור לאיחודים בני מניה. אבל הוא לא סגור לאיחודים כלשהם. למשל, הוכחנו שכל קבוצה בת מניה שייכת לNS והאיחוד של כולם הוא ω_1 שראינו שלא שייך לNS.

הגדרה: תהי $\langle A_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$. האיחוד האלכסוני שלה מוגדר באופן הבא:

$$\nabla_{\alpha<\omega_1} A_\alpha = \{\beta \in \omega_1 : \exists \alpha < \beta, \beta \in A_\alpha\}$$

טענה: NS סגור לאיחודים אלכסוניים.

הוכחה: תהי $\langle A_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ סדרה בNS. לכל α קיים f_α נורמלי שמזיז (כלפי מעלה) את כל האיברים בA_α.

אנחנו רוצים להגדיר פונקציה נורמלית שמזיזה את כל האיברים באיחוד האלכסוני.

$$f(\beta) = \sup_{\alpha<\beta} f_\alpha(\beta)$$

זה סופרימום של קבוצה בת מניה, לכן חסומה, ולכן הסופרימום שייך לω_1.
זה באמת מגדיר פונקציה.
היא עולה במובן החלש, כלומר אם $\gamma < \beta$ אז $f(\gamma) \leq f(\beta)$.
נוכיח שהיא רציפה. נניח שβ סודר גבולי.

$$f(\beta) = \sup_{\alpha<\beta} f_\alpha(\beta) = \sup_{\alpha<\beta} \sup_{\gamma<\beta} f_\alpha(\gamma) = \sup_{\gamma<\beta} \sup_{\alpha<\beta} f_\alpha(\gamma) \geq \sup_{\gamma<\beta} \sup_{\alpha<\gamma} f_\alpha(\gamma) = \sup_{\gamma<\beta} f(\gamma)$$

לכל $\alpha, \gamma < \beta$ נגדיר $\delta = \max\{\alpha+1, \gamma+1\}$. אז $\delta < \beta$. ו$\alpha, \gamma < \delta$. נשים לב שכל f_α היא פונקציה נורמלית, ובפרט היא שומרת סדר, לכן $f_\alpha(\gamma) < f_\alpha(\delta)$

$$f(\beta) = \sup_{\alpha<\beta} f_\alpha(\beta) = \sup_{\alpha<\beta} \sup_{\gamma<\beta} f_\alpha(\gamma) \leq \sup_{\alpha<\beta} \sup_{\gamma<\beta} f_\alpha(\delta) = \sup_{\gamma<\beta} \sup_{\alpha<\beta} f_\alpha(\delta) = \sup_{\delta<\beta} \sup_{\alpha<\delta} f_\alpha(\delta) = \sup_{\delta<\beta} f(\delta)$$

אז f היא פונקציה רציפה ושומרת סדר במובן החלש. נסמן בH את התמונה שלה. אז ידוע שH היא סל"ח וπ_H היא פונקציה נורמלית. וכמו כן ידוע שלכל β $f(\beta) \leq \pi_H(\beta)$. נותר להראות שהיא מזיזה כל איבר באיחוד האלכסוני.

יהי $\beta \in \nabla_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$. זה אומר שקיים $\alpha < \beta$ כך ש$\beta \in A_\alpha$. לכן $f_\alpha(\beta) > \beta$.

$$\pi_H(\beta) \geq f(\beta) = \sup_{\gamma<\beta} f_\gamma(\beta) \geq f_\alpha(\beta) > \beta$$

הגדרה: אידיאל נקרא נורמלי אם הוא סגור לאיחודים אלכסוניים. בפרט NS אידיאל נורמלי.

משפט שובך היונים הסופי: לכל m, k טבעיים קיים n גדול מספיק כך שלכל פונקציה $f : n \to m$ קיימת תת קבוצה $A \subseteq n$ בגודל k כך ש$f|_A$ קבועה. $n \geq m(k-1)+1$

באופן דומה, לכל פוקנציה $f : \omega_1 \to \omega$ קיימת תת קבוצה לא בת מניה שהצמצום עליה קבוע.
למרבה הצער, אנחנו לא יכולים לנסח משפט דומה על פונקציות $f : \omega_1 \to \omega_1$.

הגדרה: פונקציה $f : \omega_1 \to \omega_1$ נקראת "דוחסת" אם לכל $0 \neq \alpha < \omega_1$, $f(\alpha) < \alpha$.

משפט: נניח I אידיאל נורמלי על ω_1, כך ש$\{0\} \in I$.
לכל $S \in I^+$ ו$f : S \to \omega_1$ פונקציה דוחסת, קיימת תת קבוצה $A \subseteq S$ ששייכת לI^+ כך שf קבועה עליה.

הוכחה: לכל $\alpha \in \omega_1$ נסמן ב$A_\alpha = f^{-1}\{\alpha\}$. נניח בשלילה שלכל α $A_\alpha \notin I^+$ כלומר, $A_\alpha \in I$.

I אידיאל נורמלי, לכן האיחוד האלכסוני של $A_\alpha \in I$. $\nabla A_\alpha \in I$. אידיאל סגור לאיחודים סופיים ולכן I $(\{0\} \cup \nabla A_\alpha) \in I$. נזכיר כי לכל קבוצה ב$I^+$ וקבוצה ב$\hat{I}$ החיתוך לא ריק. $\cup \{0\})$ $\nabla A_\alpha)^c \in \hat{I}$. לכן

$$S \cap (\{0\} \cup \nabla A_\alpha)^c = S \setminus (\{0\} \cup \nabla A_\alpha) \neq \emptyset$$

נבחר $\beta \in S \setminus (\{0\} \cup \nabla A_\alpha)$, ונשים לב ש$\beta \neq 0$. $f(\beta) = \alpha$, ו$\alpha < \beta$ כי f דוחסת (ו$\beta \neq 0$). לכן $\beta \in A_\alpha$. אז מהגדרה, $\beta \in \nabla A_\alpha$, סתירה לבחירת β.

מסקנה: תהי $S \subseteq \omega_1$. הבאים שקולים:

1. S שבת.
2. לכל פונקציה דוחסת $f : S \to \omega_1$ קיימת $T \subseteq S$ שבת, כך ש$f|_T$ קבועה.
3. לכל פונקציה דוחסת $f : S \to \omega_1$ קיימת $T \subseteq S$ שאינה בת מניה כך ש$f|_T$ קבועה.

הוכחה:

$1 \to 2$: S שבת זה אומר ש$S \in NS^+$. ידוע שNS הוא אידיאל נורמלי, והוא מכיל את $\{0\}$ כי הוא מכיל קבוצות בנות מניה. לכן מהמשפט הקודם, קיימת $T \subseteq S$, $T \in NS^+$, כלומר, קבוצת שבת, כך ש$f|_T$ קבועה.

$2 \to 3$: קבוצת שבת אינה בת מניה כי ידוע שNS מכיל את כל הקבוצות הבנות מניה.

$3 \to 1$: כזכור, הוכחנו שקבוצה היא שבת אמ"ם היא נחתכת עם כל סל"ח.

נניח שS מקיימת שלכל פונקציה דוחסת $f : S \to \omega_1$ קיימת $T \subseteq S$ שאינה בת מניה כך ש$f|_T$ קבועה. נוכיח שS נחתכת עם כל סל"ח.

נב"ש שיש סל"ח, C, כך ש$S \cap C = \emptyset$. נבנה פונקציה

$$f : S \to \omega_1$$

$$f(\alpha) = \sup(C \cap \alpha)$$

ראשית, ברור ש$\sup(C \cap \alpha) \leq \alpha$. אבל אם הוא שווה ל$\alpha$ אז בגלל שC סגורה נקבל ש$\alpha \in C$, כי אחת ההגדרות השקולות לקבוצה סגורה היה שאם $\sup(C \cap \alpha) = \alpha$ אז $\alpha \in C$.

אבל $S \cap C = \emptyset$ לכן $f(\alpha) < \alpha$, כלומר בנינו פונקציה דוחסת.

תהי $T \subseteq S$ לא בת מניה. ברור שT לא חסומה. וגם C לא חסומה- מהגדרה. יהי $\alpha \in T$. C לא חסומה ע"י α לכן יש $\beta \in C$ כך ש$\alpha < \beta$. T לא חסומה ע"י β, לכן יש $\gamma \in T$ כך ש$\beta < \gamma$.

$$\alpha < \beta < \gamma$$

$$f(\alpha) < \alpha < \beta \leq f(\gamma)$$

כי $\beta \in C \cap \gamma$, ו$f(\gamma) = \sup(C \cap \gamma)$.

קיבלנו ש$f(\alpha) \neq f(\gamma)$.

קיבלנו שלכל תת קבוצה לא בת מניה, הצימצום עליה לא קבוע. סתירה להנחה.

לכן S שבת.

משפט אולם: קיימת מטריצה של תת קבוצות של ω_1 $\langle A_{\alpha,n}\rangle_{\alpha<\omega_1, n<\omega}$ המקיימת:

1. איברי כל עמודה זרים בזוגות. כלומר, לכל n, ולכל: $\beta \neq \alpha$, $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \emptyset$
2. איחוד על פני כל שורה שווה לכמעט כל ω_1. כלומר $\omega_1 \setminus \bigcup_n A_{\alpha,n}$ בת מניה.

הוכחה: כל סודר $\delta \in \omega_1$ הוא בן מניה, ולכן יש פונקציה חח"ע ועל

$$f_\delta : \omega \to \delta + 1$$

לכל $\alpha \in \omega_1, n < \omega$ נגדיר

$$A_{\alpha,n} = \{\delta : f_\delta(n) = \alpha\}$$

1. נקבע n, ויהיו $\beta \neq \alpha$. אם $\delta \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$ אז $f_\delta(n) = \alpha \wedge f_\delta(n) = \beta$, סתירה.
2. נקבע α.

$$\bigcup_{n<\omega} A_{\alpha,n} \supseteq \omega_1 \setminus \alpha$$

עבור כל איבר $\delta \geq \alpha$, $f_\delta : \omega \to \delta + 1$ חח"ע ועל, לכן יש n כך ש$f_\delta(n) = \alpha$. ואז $\delta \in A_{\alpha,n}$ עבור הn הזה.

לכן $\alpha \subseteq \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha,n} \setminus \omega_1$, ו$\alpha$ הוא בן מניה.

מסקנה: יהי I אידיאל סיגמא-אדיטיבי מעל ω_1 שמכיל את כל הנקודונים. אזי כל קבוצה I חיובית ניתן לפרק ל$\aleph_1$ קבוצות I חיוביות זרות בזוגות.

הוכחה: תהי $S \in I^+$. נשים לב שמספיק להוכיח ש$S \supseteq \bigcup_{\alpha \in \omega_1} A_\alpha$ של קבוצות I חיוביות זרות בזוגות.

כי אם זה קורה, נקח את $S \setminus \bigcup_{\alpha \in \omega_1} A_\alpha$ ונוסיף אותו לA_0. הקבוצות עדיין יהיו זרות בזוגות, וקבוצה שמכילה קבוצה חיובית היא גם חיובית.

נניח בשלילה שזה לא מתקיים. כלומר, לא ניתן למצוא $\aleph_1$ קבוצות חיוביות זרות בזוגות שהאיחוד שלהם מוכל בS.

לכל n, הקבוצות $A_{\alpha,n}$ ממטירצת אולם זרות בזוגות.

מההנחה, נובע ש

$$\{\alpha : A_{\alpha,n} \cap S \in I^+\}$$

היא קבוצה בת מניה.

האיחוד

$$\bigcup_n \{\alpha : A_{\alpha,n} \cap S \in I^+\} = \{\alpha : \exists n : A_{\alpha,n} \cap S \in I^+\}$$

הוא איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה.

לכן קיים $\beta \in \omega_1 \setminus \{\alpha : \exists n : A_{\alpha,n} \cap S \in I^+\}$. כלומר, עבור ה$\beta$ הזה מתקיים שלכל n,

$$A_{\beta,n} \cap S \notin I^+$$

כלומר, לכל n,

$$A_{\beta,n} \cap S \in I$$

I סיגמא אדיטיבי, כלומר סגור לאיחודים בני מניה, אז $\bigcup_n (A_{\beta,n} \cap S) \in I$ כלומר

$$S \cap (\bigcup_n A_{\beta,n}) \in I$$

אבל $\bigcup_n A_{\beta,n} \in \hat{I}$ כי $\omega_1 \setminus (\bigcup_n A_{\beta,n})$ הוא בן מניה, והנחנו שI הוא אידיאל סיגמא אדיטיבי שמכיל את כל הנקודונים, כלומר הוא מכיל כל קבוצה בת מניה.
אז $\omega_1 \setminus (\bigcup_n A_{\beta,n}) \in I$, ואז $\bigcup_n A_{\beta,n} \in \hat{I}$. וידוע שכל קבוצה ב$I^+$ חיתוך עם קבוצה ב$\hat{I}$ נותן קבוצה בI^+.
$S \in I^+$, לכן

$$S \cap (\bigcup_n A_{\beta,n}) \in I^+$$

סתירה.

מסקנה: כל קבוצה שבת ניתן לפרק ל$\aleph_1$ קבוצות שבת זרות בזוגות.

עקרונות שובך יונים

הגדרה: נניח κ, λ, θ מונים.
הסימון $\kappa \to (\lambda)_\theta$ מביע שלכל פונקציה $f : \kappa \to \theta$ קיימת תת קבוצה $H \subseteq \kappa$ מעוצמה λ כך ש$f|_H$ היא קבועה.

דוגמא: עקרון שובך היונים של דריכלה. לכל שני מספרים טבעיים $n > m$ מתקיים $n \to (2)_m$. יתר על כן $n \to [\frac{n}{m}]_m$.

משפט (עקרון שובך היונים האינסופי) נניח κ מונה אינסופי. לכל $\theta < cf(\kappa)$ מתקיים $\kappa \to (\kappa)_\theta$.

הוכחה: יהי κ מונה ו$\theta < cof(\kappa)$. נניח בשלילה שזה לא נכון. כלומר, קיימת פונקציה $f : \kappa \to \theta$, ולכל $\alpha \in \theta$ מתקיים ש$|f^{-1}\{\alpha\}| < \kappa$. $\{|f^{-1}\{\alpha\}|\}_{\alpha<\theta} \subseteq \kappa$.

$$|\{|f^{-1}\{\alpha\}|\}_{\alpha<\theta}| \le \theta < cof(\kappa)$$

כלומר, קיבלנו תת קבוצה של κ מעוצמה קטנה מהקופינליות, אז היא חסומה. יש $\delta \in \kappa$ כך שלכל $\alpha < \theta$

$$|f^{-1}\{\alpha\}| < \delta$$

נשים לב ש$\kappa = \bigcup_{\alpha\in\theta} f^{-1}\{\alpha\}$.

$$\kappa = |\kappa| \le |\delta| \cdot \theta = \max\{|\delta|, \theta\} < \kappa$$

סתירה.

משפט: לא מתקיים $\kappa \to (\kappa)_{cof(\kappa)}$

פתרון: צריך למצוא פונקציה $f : \kappa \to cof(\kappa)$ כך שלכל איבר $\alpha \in cof(\kappa)$, $|f^{-1}(\alpha)| < \kappa$.

תהי $D \subseteq \kappa$ תת קבוצה קופינלית מעוצמת הקופינליות.

נגדיר

$$g : \kappa \to D$$

$$g(\alpha) = \min\{\beta \in D : \alpha < \beta\}$$

המקור של כל איבר β בD מוכל בקבוצת האיברים שקטנים מβ, ולכן

$$|g^{-1}(\beta)\} \leq |\beta| < \kappa$$

ובסוף נרכיב עם פונקציה חח"ע ועל $D \to cof(\kappa)$