אנליזה מודרנית – תרגול 6

פונקציית קנטור

תזכורת: קבוצת קנטור C מוגדרת ע"י חיתוך הקבוצות $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, וכפי שראינו בתרגול השני ניתן לרשום גם $C=\{x=0.x_1x_2x_3\ldots_3 : \forall i\ x_i\in\{0,2\}\}$

נגדיר פונקציה $f:[0,1]\to[0,1]$ באופן הבא:

ראשית, נגדיר את הפונקציה על קבוצת קנטור. לכל $x=0.x_1x_2x_3\ldots\in C$ נחלק את הספרות הטרינאריות שלו ב-2 ונפרש את התוצאה כמספר בינארי. במילים אחרות התהליך הוא כנ"ל:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}=f(x)$$

ואם $x\notin C$, אזי x נמצא באחד מהקטעים הפתוחים $\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$ שהסרנו בבניית קבוצת קנטור. (כמו למשל $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$) במקרה זה ניתן ל-$x$ את הערך של פונקציית קנטור בקצות הקטע הזה, שבוודאי נמצאים בקבוצת קנטור (אין חשיבות לבחירת הקצה, שכן ערך הפונקציה זהה בשניהם).

לפונקציה f קוראים פונקציית קנטור, ויש לה תכונות ייחודיות ההופכות אותה לדוגמה נגדית חשובה.

דוגמאות:

$0=0.000\ldots_3\in C$ ולכן $f(x)=0.000\ldots_2=0$

$1=0.222\ldots_3\in C$ ולכן $f(1)=0.111\ldots_2=1$

$\frac{1}{3}=0.1_3=0.0222\ldots_3\in C$ ולכן $f\left(\frac{1}{3}\right)=0.0111\ldots_2=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}=0.2_3\in C$ ולכן $f\left(\frac{2}{3}\right)=0.1_2=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=0.111\ldots_3\notin C$ הוסר יחד עם הקטע $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ולכן $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

נוכיח מספר תכונות:

א. תמונת קבוצת קנטור תחת פונקציית קנטור היא כל הקטע $[0,1]$

ב. פונקציית קנטור היא מונוטונית עולה חלש בקטע $[0,1]$

ג. פונקציית קנטור היא רציפה.

ד. פונקציית קנטור גזירה כב"מ בקטע $[0,1]$ עם נגזרת 0 (לפי מידת לבג m)

<u>הוכחה:</u>

א. יש להראות $f[C]=[0,1]$. נראה הכלה דו-כיוונית.

$\subseteq$: יהי $a\in f[C]$. קיים $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\in C$ עבורו $a=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}$. הספרות $\{x_n\}$ כזכור הן 0 או 2, ולכן:

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0/2}{2^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

ולכן $a=f(x)\in[0,1]$

$\supseteq$: יהי $a\in[0,1]$ אזי יש לו פיתוח בינארי $a=0.a_1a_2a_3\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ שבו כל הספרות הן 0 או 1. נכפיל את הספרות פי 2 ונפרש את התוצאה כמספר טרינארי $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}$. זהו מספר בקבוצת קנטור ומתקיים $f(x)=a$ ולכן $a\in f[C]$.

ב. יש להראות כי אם $x,y\in[0,1]$ מקיימים $x<y$ אזי $f(x)\le f(y)$.

נוכיח תחילה את המקרה שבו $x,y\in C$: ובכן $x<y$ ולכן יהי N מיקום הספרה הטרינארית הראשונה שבה x ו- y לא מתלכדים. (כלומר $x_N=0<2=y_N$, ולכל $n<N$, $x_n=y_n$). אם כך

$$f(y)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}=\sum_{n=1}^{N-1}0+\frac{y_N/2-x_N/2}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}=$$

$$=\frac{1}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}\ge\frac{1}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{0-1}{2^n}=\frac{1}{2^N}-\frac{1}{2^N}=0$$

ובמקרה שבו $x<y\in[0,1]$ כלשהם נמצא מספרים $x',y'\in C$ המקיימים $x'\le x$ ו- $y'\ge y$ וגם $f(x')=f(x)$ ו- $f(y')=f(y)$. וע"פ המקרה הקודם $f(x')\le f(y')$ ולכן גם $f(x)\le f(y)$ וסיימנו.

ג. f מונוטונית עולה, וידוע מאינפי' שנקודות אי הרציפות של פונקציות מונוטוניות הן מסוג קפיצה בלבד. אבל קפיצה לא תתכן כי אז לא יתקיים $f[C]=[0,1]$.

ד. נוכיח ש- $f'(x)=0$ לכל $x\in C^c=[0,1]\setminus C$. ובכן יהי $x\in[0,1]\setminus C$ אזי x נמצא באחד הקטעים הפתוחים $\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$, שהסרנו בבניית קבוצת קנטור, ושם f קבועה. אם ניקח h קטן דיו, יתקיים $f(x+h)=f(x)$ ולכן

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\xrightarrow{h\to 0}0=f'(x).$$

הקבוצה שבה לא הראינו גזירות היא קבוצת קנטור, שמידתה (לבג) אפס ולכן כב"מ.
[כדאי לצייר את הגרף ולומר שהוא נותן לפונקציה את השם "מדרגות השטן"]

קצת על מבנה הבחינה: כל שאלה נפתחת בציטוט של הגדרות/משפטים מההרצאה, ולאחר מכן יש סעיף לא טריוויאלי שבו יש להוכיח משהו על סמך ההגדרות/משפטים שצוטטו.

שאלה ממבחן (מועד ב' תשע"ב)

1. יהי (X,S,μ) ממ"ח.
   א. הגדירו פונקציה מדידה S.
   ב. הגדירו פונקציה אינטגרבילית $d\mu$
   ג. צטטו את משפט ההתכנסות המונו' של לבג ב (X,S,μ)
   ד. תהי $f_n:X\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות מדידות S. נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X|f_n|d\mu<\infty$.
   הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ מתכנס כב"מ $(d\mu)$.

פתרון סעיף ד: נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}|f_n|(x)$. זו סדרה עולה של פונקציות מדידות ואי-שליליות ולכן ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X|f_n|d\mu=\int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\right)d\mu$$

ע"פ הנתון $\int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\right)d\mu<\infty$ ולכן בהכרח האינטגרנד $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|<\infty$ כב"מ. ז"א שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ מתכנס בהחלט כב"מ ולכן גם מתכנס כב"מ.

הגדרה: נאמר שהפונקציה f <u>נשלטת</u> ע"י הפונקציה $g\geq 0$, אם לכל $x\in X$ $|f(x)|\leq g(x)$.

תזכורת – משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג::

תהי $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ סדרת פונקציות מדידות , המתכנסת לפונקציית הגבול $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. נניח כי כל הפונקציות $\{f_n\}$ נשלטות ע"י פונקציה **אינטגרבילית** $g \ge 0$, אזי $\lim \int_X f_n = \int_X \lim f_n$

<u>תרגיל:</u> תהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ותהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ חסומה, מדידה (בורל) ורציפה בנקודה $x_0 = 1$ הוכיחו שהגבול $I = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x)\,dx$ קיים, וחשבו אותו.

<u>פתרון:</u> נוכל לרשום את האינטגרל בצורה הבאה: $\int_{\mathbb{R}} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x) I_{(-n,n)}(x)\,dx$.

נגדיר את סדרת הפונקציות המדידות $h_n(x) = f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x) I_{(-n,n)}(x)$.

f רציפה בנקודה 1 ולכן $\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) = f(1)$ וקיימת פונקציית הגבול $h = f(1) g(x) I_{(-\infty,\infty)}(x) = f(1) g(x)$. יהי M חסם של f . לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $|h_n(x)| \le M |g(x)|$ והפונקציה באגף ימין אינטגרבילית. ע"פ משפט ההתכנסות הנשלטת הגבול הוא $f(1) \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$