פתרון תרגיל 4 מד"ר סמסטר קיץ תשע"ו

28 ביולי 2016

1. נציב $y = e^{\lambda x}$, נמצא את הפולינום האופייני ובעזרתו נמצא פתרונות בת"ל.

   (א) הפולינום האופייני הוא:

   $$0 = 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (2\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

   השורשים הם $\lambda = 2, \frac{1}{2}$, שניהם ממשיים מריבוי 1. לכן הפתרון הוא:

   $$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$$

   (ב) הפולינום האופייני הוא:

   $$0 = 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = (3\lambda + 1)^2$$

   השורש הוא $\lambda = -\frac{1}{3}$, ממשי מריבוי 2. לכן הפתרון הוא:

   $$y = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{3}x}$$

2. נשתמש בשיטת המשמיד.

   (א) מי האופרטור שישמיד את $2\sin x + 3\cos x$? אם נסתכל עליהם כעל פתרונות של מד"ר הומוגנית, הם מתאימים לשורשים $\pm i$, כלומר לביטוי $\lambda^2 + 1$. אם כן, האופרטור הדיפרנציאלי הליניארי שישמיד את שניהם הוא $D^2 + 1$. נכתוב את המד"ר בצורה הבאה:

   $$\left(D^2 - 6D + 25\right) y = 2\sin x + 3\cos x$$

   נפעיל את האופרטור המשמיד:

   $$\left(D^2 + 1\right)\left(D^2 - 6D + 25\right) y = 0$$

נמצא את השורשים של הפולינום האופייני. חוץ מהשורשים $\pm i$, שני האחרים הם:

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = 3 \pm 4i$$

אלו שורשים מרוכבים מריבוי 1. לכן, הפתרון הכללי הוא מהצורה:

$$y = C_1 e^{3x} \cos 4x + C_2 e^{3x} \sin 4x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

כאשר $y_p = C_3 \cos x + C_4 \sin x$ הוא פתרון פרטי של המד"ר שלנו, ולכן נציב אותו במשוואה כדי למצוא את הקבועים C_3, C_4.
הנגזרות הן:

$$y_p' = -C_3 \sin x + C_4 \cos x, y_p'' = -C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

לכן:

$$-C_3 \cos x - C_4 \sin x - 6\left(-C_3 \sin x + C_4 \cos x\right) + 25\left(C_3 \cos x + C_4 \sin x\right) = 2 \sin x + 3 \cos x$$

נשווה את המקדמים:

$$\begin{cases} 6C_3 + 24C_4 = 2 \\ 24C_3 - 6C_4 = 3 \end{cases}$$

לכן $C_3 = \frac{14}{102}, C_4 = \frac{5}{102}$. בסך הכל, הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{3x} \cos 4x + C_2 e^{3x} \sin 4x + \frac{14}{102} \cos x + \frac{5}{102} \sin x$$

(ב) מי האופרטור שישמיד את $x^2 e^{4x}$? אם נסתכל עליו כעל פתרון של מד"ר הומוגנית, הוא מתאים לשורש $\lambda = 4$ בפולינום האופייני, עם ריבוי 3 (בגלל x^2). לכן, האופרטור המשמיד הוא $(D-4)^3$. נכתוב את המד"ר בצורה הבאה:

$$\left(D^2 - 9D + 20D\right) y = x^2 e^{4x}$$

נשמיד:

$$(D-4)^3 \left(D^2 - 9D + 20D\right) y = 0$$

נמצא את השורשים של הפולינום האופייני. מעבר לשורש $\lambda = 4$ מריבוי 3, שני השורשים האחרים הם:

$$\lambda = 4, \lambda = 5$$

סה"כ, 4 הוא שורש מריבוי 4 ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{4x} + C_3 x e^{4x} + C_4 x^2 e^{4x} + C_5 x^3 e^{4x}$$

כאשר $y_p = C_3 x e^{4x} + C_4 x^2 e^{4x} + C_5 x^3 e^{4x}$ הוא פתרון פרטי של המד"ר שלנו, ולכן נציב אותו במשוואה כדי למצוא את הקבועים C_3, C_4, C_5.
הנגזרות הן:

$$y_p' = \left(C_3 + (4C_3 + 2C_4)\,x + (4C_4 + 3C_5)\,x^2 + 4C_5 x^3\right) e^{4x}$$

$$y_p'' = \left(8C_3 + 2C_4 + (22C_3 + 16C_4)\,x + (16C_4 + 24C_5)\,x^2 + 16C_5 x^3\right) e^{4x}$$

נראה לי. נציב זאת במד"ר:

$$y_p'' - 9y_p' + y_p = x^2 e^{4x}$$

נשווה בין המקדמים ונקבל בסופו של דבר:

$$C_3 = -\frac{1}{3}, C_4 = 1, C_5 = \frac{1}{2}$$

ולכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{3} x e^{4x} + x^2 e^{4x} + \frac{1}{2} x^3 e^{4x}$$

3. נפתור את המשוואות ואז נציב את תנאי ההתחלה.

(א) הפולינום האופייני הוא:

$$0 = 9\lambda^2 - 3\lambda - 2 = (3\lambda - 2)\,(3\lambda + 1)$$

השורשים הם $\lambda = \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$, ממשיים מריבוי 1. לכן, הפתרון הכללי הוא:

$$y = C_1 e^{\frac{2}{3}x} + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$$

הנגזרת היא: $y' = \frac{2}{3} C_1 e^{\frac{2}{3}x} - \frac{1}{3} C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$. נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 3 = y\,(0) = C_1 + C_2 \\ 1 = y'\,(0) = \frac{2}{3} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \end{cases}$$

לכן $C_1 = 2, C_2 = 1$, והפתרון הפרטי הוא:

$$y = 2e^{\frac{2}{3}x} + e^{-\frac{1}{3}x}$$

(ב) את e^{4x} משמיד האופרטור $D-4$. נכתוב את המשוואה בעזרת D:

$$\left(D^2-8D+16\right)y=e^{4x}$$

נשמיד:

$$(D-4)\left(D^2-8D+16\right)y=0$$

חוץ מהשורש 4, השורשים הם $\lambda=4$ מריבוי 2, כלומר $\lambda=4$ הוא שורש מריבוי 3. לכן, הפתרון הוא:

$$y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}+C_3x^2e^{4x}$$

כאשר $y_p=C_3x^2e^{4x}$ הוא פתרון פרטי של המד"ר, ולכן נציב אותו במשוואה כדי למצוא את הקבוע C_3.
הנגזרות הן:

$$y_p'=\left(4C_3x^2+2C_3x\right)e^{4x}$$

$$y_p''=\left(8C_3x^2+16C_3x+2C_3\right)e^{4x}$$

נציב במשוואה:

$$\left(16C_3x^2+16C_3x+2C_3\right)e^{4x}-8\left(4C_3x^2+2C_3x\right)e^{4x}+16C_3x^2e^{4x}=e^{4x}$$

כלומר:

$$2C_3e^{4x}=e^{4x}$$

ולכן $C_3=\frac{1}{2}$, כלומר הפתרון הוא:

$$y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}+\frac{1}{2}x^2e^{4x}$$

הנגזרת היא: $y'=4C_1e^{4x}+C_2e^{4x}+4C_2xe^{4x}+xe^{4x}+2x^2e^{4x}$. נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 0=y(0)=C_1 \\ 1=y'(0)=4C_1+C_2 \end{cases}$$

ולכן $C_1=0,C_2=1$, והפתרון הפרטי הוא:

$$y=xe^{4x}+\frac{1}{2}x^2e^{4x}$$

(ג) האופרטור שמשמיד את 1 הוא D. נכתוב את המשוואה בעזרת D:

$$\left(2D^2-D\right)y=1$$

נשמיד:

$$D\left(2D^2-D\right)y=0$$

השורשים הם $\lambda=0$ מריבוי 2, $\lambda=\frac{1}{2}$ מריבוי 1 ולכן הפתרון הוא:

$$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2+C_3x$$

כאשר $y_p=C_3x$ הוא פתרון פרטי של המד"ר, ולכן נציב אותו במשוואה כדי למצוא את הקבוע C_3.

הנגזרות הן:

$$y_p'=C_3,y_p''=0$$

נציב במשוואה:

$$-C_3=1$$

לכן $C_3=-1$, ולכן הפתרון הוא:

$$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2-x$$

הנגזרת היא: $y'=\frac{1}{2}C_1e^{\frac{1}{2}x}-1$. נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases}0=y\left(0\right)=C_1+C_2\\ 1=y'\left(0\right)=\frac{1}{2}C_1\end{cases}$$

לכן $C_1=2,C_2=-2$ והפתרון הפרטי הוא:

$$y=2e^{\frac{1}{2}x}-2-x$$

4. נסתכל על הפונקציות כעל פתרונות של מד"ר ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים.

(א) $e^{2x}\cos 2x$ הוא פתרון של מד"ר שבפולינום האופייני שלה מופיעים השורשים $\lambda=2\pm 2i$, ולכן האופרטור המשמיד הוא:

$$\left(D-2-2i\right)\left(D-2+2i\right)=D^2-4D+8$$

(ב) בשביל $1, x$ אנו צריכים את השורש $\lambda = 0$ מריבוי 2 ובשביל e^{-2x} אנו צריכים את השורש $\lambda = -2$, ולכן האופרטור המשמיד הוא:

$$D^2 (D+2)$$

5. נשתמש בפולינום האופייני.

(א) הפולינום האופייני הוא:

$$0 = \lambda^5 - 10\lambda^3 + 9\lambda = \lambda \left(\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9\right) =$$

$$= \lambda \left(\lambda^2 - 9\right) \left(\lambda^2 - 1\right) = \lambda (\lambda - 3) (\lambda + 3) (\lambda - 1) (\lambda + 1)$$

ולכן השורשים הם $\lambda = 0, \pm 1, \pm 3$, ממשיים מריבוי 1. לכן, הפתרון הוא:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$$

(ב) הפולינום האופייני הוא:

$$0 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 = (\lambda + i)^2 (\lambda - i)^2$$

ולכן השורשים הם $\lambda = \pm i$, מרוכבים מריבוי 2. לכן, הפתרון הוא:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_1 x \sin x + C_2 x \cos x$$

6. שוב, נשתמש באופרטור משמיד.

(א) את $x^2 + 1$ ישמיד D^3. נכתוב את המשוואה באמצעות D:

$$\left(D^3 + 3D^2 - D - 3\right) y = x^2 + 1$$

נשמיד:

$$D^3 \left(D^3 + 3D^2 - D - 3\right) y = 0$$

מעבר לשורש $\lambda = 0$ מריבוי 3, עלינו למצוא את השורשים האחרים, של הביטוי $D^3 + 3D^2 - D - 3$.

ניתן לראות שגם $\lambda = 1$ וגם $\lambda = -1$ הם שורשים, ואם כן:

$$D^3 + 3D^2 - D - 3 = D\left(D^2 - 1\right) + 3\left(D^2 - 1\right) = (D+3)(D-1)(D+1)$$

והשורש הנוסף הוא -3, ושלושתם ממשיים מריבוי 1. לכן, הפתרון הוא:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 e^{-x} + C_6 e^{3x}$$

כאשר $y_p = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$ הוא פתרון פרטי של המד"ר, ולכן נציב אותו במשוואה כדי למצוא את הקבועים C_1, C_2, C_3.
הנגזרות הן:

$$y_p' = C_2 + 2C_3 x, y_p'' = 2C_3, y_p''' = 0$$

נציב במשוואה:

$$3 \cdot 2C_3 - C_2 - 2C_3 x - 3C_1 - 3C_2 x - 3C_3 x^2 = x^2 + 1$$

נשווה את המקדמים:

$$\begin{cases} -3C_3 = 1 \\ -2C_3 - 3C_2 = 0 \\ 6C_3 - C_2 - 3C_1 = 1 \end{cases}$$

ולכן $C_3 = -\frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{9}, C_1 = -\frac{29}{27}$.
אם כן, הפתרון הוא:

$$y = -\frac{29}{27} + \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}x^2 + C_4 e^x + C_5 e^{-x} + C_6 e^{3x}$$

(ב) המשוואה עצמה היא אותה משוואה כמו בסעיף הקודם, אלא שהפעם האופרטור המשמיד הוא $D - 2$. לכן, הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x}$$

כאשר $y_p = C_1 e^{2x}$ הוא פתרון פרטי של המד"ר, ולכן נציב אותו במשוואה כדי למצוא את הקבוע C_1.
הנגזרות הן:

$$y_p' = 2C_1 e^{2x}, y_p'' = 4C_1 e^{2x}, y_p''' = 8C_1 e^{2x}$$

נציב במשוואה:

$$8C_1 e^{2x} + 12C_1 e^{2x} - 2C_1 e^{2x} - 3C_1 e^{2x} = e^{2x}$$

ולכן $C_1 = \frac{1}{15}$.
אם כן, הפתרון הוא:

$$y = \frac{1}{15}e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x}$$

7. נוסחת ליוביל אומרת שלכל t_0:

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(x))dx}$$

כאשר A היא מטריצת המקדמים ו־Y היא המטריצה היסודית.
אפשר לבחור $t_0 = 0$.
$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} e^{kt} \\ 0 \end{pmatrix}$ פתרון. נסמן: $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ כפתרון נוסף. אם כן:

$$\det Y(t) = \det \begin{pmatrix} e^{kt} & y_1(t) \\ 0 & y_2(t) \end{pmatrix} = e^{kt} y_2(t)$$

$$\det Y(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & y_1(0) \\ 0 & y_2(0) \end{pmatrix} = y_2(0)$$

מטריצת המקדמים היא $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, ולכן $trA = 2k$, כלומר:

$$e^{\int_0^t tr(A(x))dx} = e^{2kt}$$

לכן, מנוסחת ליוביל נקבל:

$$e^{kt} y_2(t) = y_2(0) e^{2kt}$$

ולכן:

$$y_2(t) = y_2(0) e^{kt}$$

זה כמובן נובע מיידית מהמשוואה השנייה במערכת, אך ביקשו להשתמש בנוסחת ליוביל.
בכל אופן, המשוואה הראשונה היא:

$$y_1'(t) = k y_1(t) + y_2(t)$$

ומהמשוואה שקיבלנו בעזרת נוסחת ליוביל:

$$y_1'(t) = k y_1(t) + y_2(0) e^{kt}$$

זו מד"ר ליניארית מסדר ראשון. הפתרון ההומוגני הוא $y_1(0) e^{kt}$, ופתרון פרטי לא הומוגני אפשר למצוא בעזרת וריאציית המקדמים: $t y_2(0) e^{kt}$.
כלומר, $y_1(t) = y_1(0) e^{kt} + t y_2(0) e^{kt}$, ולכן הפתרון הנוסף הוא:

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) e^{kt} + t y_2(0) e^{kt} \\ y_2(0) e^{kt} \end{pmatrix}$$

ובסך הכל הפתרון הוא:

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2 = C_1\begin{pmatrix} e^{kt} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} y_1(0)\,e^{kt} + ty_2(0)\,e^{kt} \\ y_2(0)\,e^{kt} \end{pmatrix}$$

כבר $y_1(0), y_2(0)$ הם קבועים חופשיים, ולכן אפשר לבחור למשל $C_1 = C_2 = 1$ ולקבל פתרון כללי:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} e^{kt} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1(0)\,e^{kt} + ty_2(0)\,e^{kt} \\ y_2(0)\,e^{kt} \end{pmatrix} = \left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right)e^{kt}$$

אחרי שסימנו $A = y_1(0) + 1, B = y_2(0)$.