# תרגיל 11

להגשה עד 1.2.17

### שאלה 1

נניח כי $\mu$ ו $\nu$ הינן מידות חיוביות $\sigma$סופיות, כך ש $\nu$ הינה רציפה בהחלט ביחס ל $\mu$. תהי $\rho = \mu + \nu$. שימו לב כי $\rho \ll \mu$ וגם $\rho \ll \nu$. הוכיחו כי אם $f = \frac{d\mu}{d\rho}$ ו $g = \frac{d\nu}{d\rho}$ אזי:

1. $f > 0$ כב"מ $\mu$.
2. $f + g = 1$ כב"מ $\rho$.
3. $d\nu = \frac{g}{f} d\mu$.

### שאלה 2

יהיו $\mu$ ו $\nu$ שתי מידות חיוביות כך ש $\nu \ll \mu$ ו $\mu = g d\nu$ באשר $0 < \delta < |g|$. הראו כי אם $f$ פונקציה אינטגרבילית ביחס ל $\mu$ אזי היא אינטגרבילית ביחס ל $\nu$, ומתקיים:

$$\int f g d\nu = \int f d\mu .$$

### שאלה 3

חשבו את האינטגרלים הבאים, כאשר $\mu_F$ הינה מידת סטילטיס המתאימה לפונקציה $F$.

1. $\int_{(-\infty,0]} f \, d\mu_F$, כאשר $f$ הינה פונקציה רציפה ו: $F(x) := \begin{cases} 2 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in (-\infty, 0]$.
2. $\int_{[0,1]} x \, d\mu_F(x)$ , עבור: $F(x) := \begin{cases} 4 & x \geq 1 \\ x+1 & 0 \leq x < 1 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$.

### שאלה 4

נגדיר $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$F(y) := \int_0^\infty \frac{e^{-xy} - e^{-x}}{x} dx .$$

הוכיחו ש $F$ גזירה, וחשבו את הנגזרת $F'$.

**בהנאה :)**