אינפי 3 – תרגיל 8

חשב את האינטגרלים הבאים:

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$$

פתרון:

נסמן $\varphi(y)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{y}\arctan\frac{1}{y}$. נגזור את שני האגפים:

$$\varphi'(y)=-\int_0^1 \frac{2ydx}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{1}{y^2}\arctan\frac{1}{y}-\frac{1}{y(1+y^2)}$$

$$-\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{1}{2y^3}\arctan\frac{1}{y}-\frac{1}{2y^2(1+y^2)}$$. נגזור שוב:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^3}=\frac{3}{8y^5}\arctan\frac{1}{y}+\frac{5y^2+3}{8y^4(1+y^2)^2}$$

נציב $y=a$ וקיבלנו את הפתרון.

2. $$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$$

פתרון:

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2}{1+y^2}dxdy=\int_0^1 x^2dx\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}=\int_0^1 x^2dx\arctan y\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{12}$$

3. $$\iint_D e^{-\frac{x}{y^2}}dxdy$$ כאשר $D=\left\{x\ge y^2;x\le 2y^2;0\le y\le 1\right\}$

פתרון:

$$\iint_D e^{-\frac{x}{y^2}}dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{2y^2} e^{-\frac{x}{y^2}}dx=\int_0^1\left(-y^2e^{-\frac{x}{y^2}}\right)_{y^2}^{2y^2}dy=\int_0^1 y^2(e^{-1}-e^{-2})dy=\frac{1}{3}(e^{-1}-e^{-2})$$

צייר את תחום האינטגרציה, והחלף את סדר האינטגרציה:

.4 $\int_{0}^{2} dx \int_{\frac{4-x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

פתרון:

$$\int_{0}^{1} dy \int_{2\sqrt{1-y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

חשב את האינטגרלים באמצעות החלפת משתנים

.5 $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ כאשר $D = \left\{ (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{2} \right\}$

פתרון:

(שימו לב שזהו אינטגרל לא אמיתי, ולכן הפעולות לא באמת חוקיות לפי מה שלמדנו עד כה)

נעבור לקואורדינטות קוטביות $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. לכן $0 \le r \le \cos\theta + \sin\theta$,

$-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3}{4}\pi$. לכן סה"כ $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_{0}^{\cos\theta+\sin\theta} \frac{rdr}{\sqrt{r^2}} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta + \sin\theta)d\theta = 2\sqrt{2}$

6. $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ כאשר $D=\{1\le x+y\le 2; x\ge 0; y\ge 0\}$ רמז: $u=x+y, v=x-y$

פתרון:

נסמן $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$ ולכן $u=x+y, v=x-y$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

נסמן $\Delta=\{1\le u\le 2, v\ge -u, u\ge v\}$

לכן $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy=\iint_\Delta e^{\frac{v}{u}}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv=\iint_\Delta \frac{1}{2}e^{\frac{v}{u}}dudv=\int_1^2 du\int_{-u}^{u}\frac{1}{2}e^{\frac{v}{u}}dv=$

$$=\int_1^2 du\int_{-u}^{u}\frac{1}{2}e^{\frac{v}{u}}dv=\int_1^2\left(\frac{u}{2}e^{\frac{v}{u}}\right)_{-u}^{u}du=\int_1^2\frac{u}{2}(e-e^{-1})du=\frac{1}{4}(e-e^{-1})u^2\Big|_1^2=\frac{3}{4}(e-e^{-1})$$

חשב את מרכז המסה של הגוף ההומוגני הבא ($\rho(x,y)=1$)

7. $D=\left\{y^2\le 4x+4;\, y^2\le -2x+4\right\}$

פתרון:

מרכז הכובד נמצא בקואורדינטות $x_0=\dfrac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy},\ y_0=\dfrac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}$

לכן יש לחשב 3 אינטרגלים:

$$\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-2\sqrt{1+x}}^{2\sqrt{1+x}}dy+\int_{0}^{2}dx\int_{-2\sqrt{1-\frac{x}{2}}}^{2\sqrt{1-\frac{x}{2}}}dy=\int_{-1}^{0}4\sqrt{1+x}dx+\int_{0}^{2}4\sqrt{1-\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\left(4\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right)_{-1}^{0}-\left(4\frac{4}{3}(1-\frac{x}{2})^{\frac{3}{2}}\right)_{0}^{2}=8$$

$$\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D xdxdy=\int_{-1}^{0}xdx\int_{-2\sqrt{1+x}}^{2\sqrt{1+x}}dy+\int_{0}^{2}xdx\int_{-2\sqrt{1-\frac{x}{2}}}^{2\sqrt{1-\frac{x}{2}}}dy=\int_{-1}^{0}4x\sqrt{1+x}dx+\int_{0}^{2}4x\sqrt{1-\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}4x\sqrt{1+x}dx+\int_{0}^{2}4x\sqrt{1-\frac{x}{2}}dx=$$

$$=4\left(\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}x-\frac{2\cdot 2}{5\cdot 3}(1+x)^{\frac{5}{2}}\right)_{-1}^{0}-4\left(\frac{4}{3}(1-\frac{x}{2})^{\frac{3}{2}}x+\frac{2\cdot 8}{5\cdot 3}(1-\frac{x}{2})^{\frac{5}{2}}\right)_{0}^{2}=8\frac{2}{5}$$

$$\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D ydxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-2\sqrt{1+x}}^{2\sqrt{1+x}}ydy+\int_{0}^{2}xdx\int_{-2\sqrt{1-\frac{x}{2}}}^{2\sqrt{1-\frac{x}{2}}}ydy=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}y^2\right)_{-2\sqrt{1+x}}^{2\sqrt{1+x}}dx+\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}y^2\right)_{-2\sqrt{1-\frac{x}{2}}}^{2\sqrt{1-\frac{x}{2}}}dx=0$$

לכן סה"כ מרכז המסה הוא $(x_0,y_0)=(\frac{2}{5},0)$