# אלגברה לינארית לתיכוניסטים־תרגיל 1

1. פתרו בעזרת משפט דה מואבר את המשוואות הבאות:

(א) $z^7 = 1$

(ב) $z^4 = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^{10}$

2. בנו שדה בן $4$ איברים. ציינו מהם האיברים הניטרליים לחיבור וכפל.

3. פתרו את מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{R}$.

$$x + y + az = 1$$
$$x + ay + z = 1$$
$$ax + y + z = 1$$

(כלומר, גם להחליט כמה פתרונות יש כתלות בערך הפרמטר וגם למצוא את הפתרונות)

4. פתרו את מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$

$$a^2x_1 + 5x_2 + x_3 = b$$
$$ax_1 + (a+3)x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

5. מצאו מערכת משוואות עם $121$ פתרונות בדיוק.

6. נסתכל על מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 2 \end{array}\right)$$

קבעו לכל ערך של $a \in \mathbb{Z}_3$ כמה פתרונות יהיו למערכת.

7. חשבו את

(א)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ -5 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -4 \\ 7 & 0 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2013}$$

8. נסמן ב $E_{i,j}$ מטריצה ריבועית שמופיע בה $1$ במקום ה $i,j$ ואפס בכל שאר המקומות. הראו ש

(א)
$$E_{i,j}E_{k,l}=\begin{cases}E_{i,l} & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}$$

(ב) לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים

$$AE_{i,j}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}\phantom{0} & \phantom{\cdots} & \phantom{0} & j & \phantom{0} & \phantom{\cdots} & \phantom{0}\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & A_{1,i} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,i} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

כלומר $AE_{i,j}$ היא מטריצה שהעמודה ה $j$ שלה היא העמודה ה $i$ של $A$, וכל שאר העמודות מכילות אפסים.

(ג) לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$

$$E_{i,j}A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\\ A_{j,1} & \cdots & A_{j,n}\\ 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\\ \\ \\ i\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

כלומר $E_{i,j}A$ היא המטריצה שבשורה ה $i$ שלה נמצאת השורה ה $j$ של $A$ וכל שאר השורות הן $0$.

(ד) לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים

$$E_{i,j}AE_{k,l}=A_{j,k}E_{i,l}$$

9. לצורך התרגיל הזה נגדיר כמה הגדרות עבור מטריצות ריבועיות.

- מטריצה נקראת משולשית עליונה אם כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי הם $0$. כלומר $A_{i,j}=0$ כאשר $j<i$.
- מטריצה נקראת משולשית תחתונה אם כל האיברים מעל האלכסון הראשי הם $0$. כלומר $A_{i,j}=0$ כאשר $i<j$.
- מטריצה נקראת משולשית אם היא משולשית עליונה או תחתונה.
- מטריצה נקראת אלכסונית אם כל האיברים שלא על האלכסון הראשי הם $0$. כלומר $A_{i,j}=0$ כאשר $i\neq j$.
- מטריצה נקראת סקלרית אם היא אלכסונית וכל איברי האלכסון הראשי שווים. כלומר, קיים $c\in\mathbb{F}$ כך ש $A=cI$.

- קבוצה של מטריצות ריבועיות $X$ נקראת סגורה לכפל אם לכל $A, B \in X$ מתקיים $A \cdot B \in X$.

האם הקבוצות הבאות סגורות לכפל? אם כן ־ הוכיחו. ואם לא־ הביאו דוגמא נגדית.

- מטריצות משולשיות עליונות.
- מטריצות משולשיות.
- מטריצות אלכסוניות.
- מטריצות סקלריות.