# ו"ע, ע"ע ומרחבים עצמיים

30 באפריל 2016

## ע"ע (ערכים עצמיים), ו"ע (וקטורים עצמיים) והמרחב העצמי

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $Av = \lambda v$ אזי $v$ יקרא ו"ע, $\lambda$ יקרא ע"ע.
חידוד: $v \neq 0$ אבל יתכן $\lambda = 0$.
דוגמא:

1. $A = I$ אזי לכל $v$ מתקיים $Av = v$ ולכן עבור מטריצת היחידה $\lambda = 1$ הוא ע"ע וכל וקטור הוא ו"ע (של 1 ).

2. $A = 0$ אזי לכל $v$ מתקיים $Av = 0 = 0 \cdot v$ ולכן עבור מטריצת האפס $\lambda = 0$ הוא ע"ע וכל וקטור הוא ו"ע (של 0 ).

### איך מוצאים ע"ע ו"ע?

עבור $v \neq 0$ מתקיים
$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)v = 0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)$ לא הפיכה $\Leftrightarrow |A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$.
כלומר $\lambda$ הוא ע"ע של $A$ אמ"מ $f_A(\lambda) = 0$ . כאשר $f_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ הוא הפולינום האופני של $A$.
דוגמא $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ אזי

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} \lambda-5 & -6 \\ 3 & \lambda+4 \end{pmatrix}| \\ &= (\lambda-5)(\lambda+4)+18 = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

ולכן $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ הם ע"ע של $A$.
הערה: הדרגה של הפולינום האופיני הוא $n$
אחרי שיודעים ע"ע ־ איך מוצאים ו"ע?
עבור מטריצה $A$ נניח שמצאנו ע"ע $\lambda$ אזי הו"ע המתאים (לע"ע $\lambda$ ) מקיים $(A-\lambda I)v = 0$ כלומר $v \in V_\lambda = N(A-\lambda I)$
נמשיך בדוגמא: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 2$ נמצא ו"ע מתאים.
ש"ל $0 \neq v \in N(\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})$ כלומר $v \in N(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix})$.
נדרג $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in N(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix})$ ולכן הוא ו"ע המתאמים ל $\lambda_1 = 2$.
אכן מתקיים $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
באותו אופן נמצא ו"ע ל $\lambda_2 = -1$ . נמצא $v \in N(\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$

נדרג $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כלומר $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו"ע המתאים ל $\lambda_2 = -1$.

לסיכום־ בהנתן מטריצה $A$

1. בעזרת $f_A(\lambda) = 0$ נמצא ע"ע של $A$
2. לאחר שמצאנו $\lambda$ ע"ע של $A$ וקטור עצמי מתאים הוא $0 \neq v \in N(A - \lambda I)$

תרגיל: הוכח שלמטריצות דומות יש אותו פולינום אופיני.
פתרון יהיו $A, B$ מטריצות דומות (כלומר $A = PBP^{-1}$) אזי

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - PBP^{-1}| = |\lambda P I_n P^{-1} - PBP^{-1}| \\ &= |P(\lambda I_n - B)P^{-1}| = |P| \cdot |(\lambda I_n - B)| \cdot |P^{-1}| \\ &= |P^{-1}| \cdot |P| \cdot |(\lambda I_n - B)| = |(\lambda I_n - B)| = f_B(\lambda) \end{aligned}$$

תרגיל: מצא ע"ע ו"ע של $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון: $f_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 1)^2 \lambda^2$

כלומר $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ . נמצא ו"ע: עבור $\lambda_1 = 1$

$$N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

עבור $\lambda_2 = 0$

$$N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\} = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

הערות:

1. לע"ע יתכנו כמה ו"ע (בת"ל)
2. משפט (כללי): עבור $\lambda_1 \dots \lambda_m$ ע"ע שונים, $v_1, \dots v_m$ ו"ע עצמיים מתאימים אזי $\{v_1, \dots v_m\}$ בת"ל. כלומר ו"ע של ע"ע שונים הם בת"ל.
3. הגדרות:
   (א) עבור ע"ע $\lambda_0$ הריבוי האלגברי שלו (ר"א) הוא מספר הפעמים בו מופיע $\lambda - \lambda_0$ בפולינום האופיני. אצלנו בדוגמא הר"א של $\lambda_1 = 1$ וגם של $\lambda_2 = 0$ שווה 2.
   (ב) עבו ע"ע $\lambda_0$ הריבוי הגיאומטרי שלו (ר"ג) הוא $\dim V_{\lambda_0}$ (מודד כמה ו"ע בתל יש עבור הע"ע). אצלנו בדוגמא הר"ג של $\lambda_1 = 1$ הוא 2 ואילו הר"ג של $\lambda_2 = 0$ הוא 1.

(ג) משפט: עבור כל ע"ע מתקיים כי ר"א $\leq$ ר"ג $\leq 1$

.

## הצבה בפולינום

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_mx^m \in \mathbb{F}[x]$ אזי הצבה של $A$בפולינום $f(x)$ מוגדר להיות $f(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 \cdots a_mA^m$.

דוגמא: חשב את ההצבה של $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ בפולינום $f_A(x) = x^2 - x - 2$

פתרון:

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - A - 2\cdot I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

משפט קיילי: תהא $A$ ו $f_A(\lambda)$ הפולינום האופיני. אזי $f_A(A) = 0$.

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. ו $f_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^i$ הפולניום האופיני שלה. הוכח כי $A$ הפיכה אמ"מ $a_0 \neq 0$

פתרון: $A$ הפיכה אמ"מ $|A| \neq 0$ אמ"מ $a_0 = f_A(0) = |A - 0I| \neq 0$