30.09.21

מועד א' – אינפי 1 למדעי המחשב – 89-132

<u>מרצה</u>: דר' ארז שיינר <u>הוראות</u>: משקל כל שאלה 22 נק' <u>משך המבחן</u>: שלוש שעות <u>חומר עזר</u>: מחשבון פשוט בלבד

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin(x+ln(1+x))}{\sqrt{1-\cos(2x)}}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x+ln(1+x))}{\sqrt{1-\cos(2x)}}\overset{WIN}{=}\lim_{x\to0^+}\underbrace{\frac{\sin(x+ln(1+x))}{x+\ln(1+x)}}_{\to1}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{(2x)^2}{1-\cos(2x)}}}_{\to\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\frac{x+\ln(1+x)}{2x}}_{\substack{\to1\\ \text{הסבר למטה}}}=\sqrt{2}$$

שימו לב, $\sqrt{x^2}=x$ כאן כיוון ש $x\to0^+$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x+\ln(1+x)}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to1}=1$$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}e^x-x\cdot\ln(x)$

$$\lim_{x\to\infty}e^x-x\ln(x)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x\ln(x)}{e^x}\right)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x\ln(x)}{e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}}\right)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\underbrace{\frac{x}{e^{\frac{1}{2}x}}}_{\to0}\cdot\underbrace{\frac{\ln(x)}{e^{\frac{1}{2}x}}}_{\to0}\right)=\{\infty\cdot(1-0)\}=\infty$$

ג. $\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2-1}}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n^2+1}}}$

נחשב את הגבולות של המונה והמכנה בנפרד, ונקווה לטוב.

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2-1}}=\{1^\infty,\text{כלל ה}e\}=e^{\lim\sqrt{n^2-1}\cdot\frac{1}{n}}=e^{\lim\frac{n}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=e$$

$$\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n^2+1}}=\{1^\infty,\text{כלל ה}e\}=e^{\lim\sqrt{n^2+1}\cdot\frac{2}{n}}=e^{\lim\frac{n}{n}\cdot2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=e^2$$

סה"כ התשובה הינה

$$\frac{e}{e^2}=\frac{1}{e}$$

2. קבעו לכל אחד מן הטורים הבאים אם הוא מתכנס בהחלט, בתנאי או מתבדר:

א. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2(n)}$

קל לראות כי סדרת האיברים שואפת לאפס, ולכן נבדוק התכנסות בהחלט

טור הערכים המוחלטים הוא

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)}$$

כיוון ש $\frac{1}{n\ln^2(n)}$ מונוטונית יורדת (כאשר n גדול, המכנה גדל, והסדרה יורדת) ולכן מותר להשתמש במבחן העיבוי

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)}\approx\sum_{n=3}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{2^n\ln^2(2^n)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln(2^n))^2}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n\ln(2))^2}=\frac{1}{\ln^2(2)}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

והטור האחרון מתכנס כי מדובר בטור ההרמוני המוכלל עם חזקה גדולה מ1.

סה"כ הטור שלנו מתכנס בהחלט.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+(-1)^n}-n}{n^2+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+(-1)^n}-n}{n^2+1}\overset{\text{כפל וחילוק בצמוד}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+(-1)^n-n^2}{(n^2+1)\left(\sqrt{n^2+(-1)^n}+n\right)}$$

נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)\left(\sqrt{n^2+(-1)^n}+n\right)}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+0)(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

הטור מימין מתכנס (כמו שהסברנו בסעיף א'), ולכן לפי מבחן ההשוואה גם הטור שלנו מתכנס בהחלט.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(n^{\cos(n)}\right)}{n}$

משהו עם דיריכלה

3. תהי סדרה כך ש $a_1 = 2$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4}$, הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

קצת נשחק עם הסדרה (נציב איברים ראשונים) על מנת לראות מי נגד מי.

$$a_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4}$$

נדמה שהסדרה יורדת.

ננסה להוכיח זאת, כלומר ננסה להוכיח כי $a_{n+1} - a_n < 0$ לכל n.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n - 1}{a_n + 4} - a_n = \frac{2a_n - 1 - a_n^2 - 4a_n}{a_n + 4} = -\frac{a_n^2 + 2a_n + 1}{a_n + 4} = -\frac{(a_n + 1)^2}{a_n + 4}$$

הסדרה אכן תהיה יורדת תמיד, אם

$$a_n + 4 > 0$$

ננסה להוכיח באינדוקציה

עבור המקרה הראשון, אכן $a_1 + 4 = 6 > 0$

יהי n עבורו $a_n > -4$ צ"ל כי

$$\frac{2a_n - 1}{a_n + 4} > -4$$

מהנחת האינדוקציה המכנה $a_n + 4 > 0$ ולכן מותר לכפול בו מבלי לשנות את סימן אי השיוויון

$$2a_n - 1 > -4(a_n + 4)$$

$$6a_n > -15$$

$$a_n > -\frac{15}{6}$$

לא הלך.

אני משאיר את כל הדרך כאן, אפילו שנתקענו, כי מזה לומדים הכי הרבה.

כמה הכיוונים להמשך:

לנסות לראות מה אמור להיות הגבול אם הסדרה אכן מתכנסת,

לנסות להוכיח באינדוקציה שהיא יורדת,

לסדר את המונה בביטוי של a_{n+1} כך שיצטמצם המכנה, זה הרבה פעמים עוזר.

ננסה את השיטה הראשונה: אם $a_n \to L \in \mathbb{R}$ נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{2a_n - 1}{a_n + 4}$$

$$L = \frac{2L - 1}{L + 4}$$

הערה: הנחתי כאן גם כי $L \neq -4$.

$$L^2 + 4L = 2L - 1$$

$$L^2 + 2L + 1 = 0$$

$$(L + 1)^2 = 0$$

$$L = -1$$

בואו ננסה לכן להוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_n > -1$ ואז על אחת כמה וכמה $a_n > -4$ שזה מה שניסינו להוכיח קודם אך נכשלנו!

באינדוקציה: מקרה ראשון, אכן $a_1 = 2 > -1$

יהי n עבורו $a_n > -1$ צ"ל כי $a_{n+1} > -1$

כלומר צ"ל כי

$$\frac{2a_n - 1}{a_n + 4} > -1$$

שוב מהנחת האינדוקציה המכנה חיובי ולכן מותר לכפול בו ללא חשש

$$2a_n - 1 > -a_n - 4$$

$$3a_n > -3$$

$$a_n > -1$$

וזה אכן נכון לפי הנחת האינדוקציה.

שימו לב לתופעה המוזרה, לא הצלחנו להוכיח באינדוקציה כי $a_n > -4$

כן הצלחנו להוכיח באינדוקציה טענה חזקה יותר כי $a_n > -1$

לכן בפרט

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n+1)^2}{a_n+4} < 0$$

ולכן הסדרה אכן יורדת, וכמו כן חסומה מלרע ע"י -1.

כיוון שהסדרה מונוטונית וחסומה, היא אכן מתכנסת לגבול סופי $a_n \to L \in \mathbb{R}$

כיוון ש $a_n > -1$ לכל n נובע כי גם $L \geq -1$ ולכן $L \neq -4$.

ולכן לפי ההוכחה לעיל, הראנו שבמקרה זה בהכרח $L = -1$.

4. תהי פונקציה f רציפה בקטע $[0,1]$, ונניח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת נקודה $x \in [0,1]$ כך ש $f(x) > 1 - \varepsilon$

א. הוכיחו: קיימת נקודה $c \in [0,1]$ בה $f(c) \geq 1$.

לפי ווירשטראס, הפונקציה מקבלת מקסימום בקטע, נניח בנקודה c.

נב"ש ש $f(c) < 1$ אזי קיימת נקודה x בקטע עבורה $f(c) < f(x) < 1$ (עבור $\varepsilon = \frac{1-f(c)}{2}$

בסתירה לכך ש$f(c)$ היא המקסימום.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $f(0) = 0$ אזי קיימת נקודה $c \in [0,1]$ בה $f(c) = 1$.

נשים לב כי עבור c מסעיף א'

$$f(0) < 1 \leq f(c)$$

לכן לפי משפט ערך הביניים (הפונקציה רציפה), קיימת נקודה d בה $f(d) = 1$

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(x)<x$.

א. הוכיחו או הפריכו: לפונקציה $h(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$ יש בדיוק שורש אחד.

נחקור את הנגזרת

$$h'(x)=f'(x)-x<0$$

כלומר הפונקציה יורדת. לכן יש לכל היותר חיתוך יחיד.

אבל, האם העובדה שהפונקציה יורדת מבטיחה שיהיה חיתוך?

לא!

אם $h(x)=e^{-x}$ אז לא יהיה חיתוך כלל.

כלומר נבחר

$$f(x)=e^{-x}+\frac{x^2}{2}$$

ולכן

$$h(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}=e^{-x}$$

אין לה חיתוך עם ציר הא

ואכן

$$f'(x)=x-e^{-x}<x$$

ב. חשבו את $\lim_{x\to\infty} f(x)-x^2$.

הפונקציה מסעיף א' יורדת, לכן לכל $x>0$ מתקיים כי

$$h(0)>h(x)$$

כלומר

$$f(0)>f(x)-\frac{x^2}{2}$$

ולכן

$$f(x) < f(0) + \frac{x^2}{2}$$

ולכן

$$f(x) - x^2 < f(0) - \frac{x^2}{2} \to -\infty$$

לפי חצי סנדביץ, גם הביטוי שלנו שואף ל$-\infty$.