84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – פתרון בוחן אמצע – תשפ"ד – 07.07.24

שאלה 1

נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x,y,z והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x+y=-a \\ ax+z=-a \\ ay+(a^2-2)z=0 \end{cases}$$

דירוג המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -a \\ a & 0 & 1 & -a \\ 0 & a & a^2-2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -a \\ 0 & -a & 1 & a^2-a \\ 0 & a & a^2-2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -a \\ 0 & -a & 1 & a^2-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2-a \end{array}\right)$$

סעיף א':

מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל

אם $-a\neq 0$ וכן $a^2-1\neq 0$ כלומר אם $a\neq 0,\pm 1$ אז המטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, אין משתנים חופשיים ולכן פתרון יחיד.

נציב כעת את שלושת המקרים הנותרים:

נציב $a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

זו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, יש משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.

נציב $a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

זו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, יש משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.

נציב $a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

יש שורת סתירה ולכן אין פתרונות.

סה"כ

עבור $a\neq 0,\pm 1$ פתרון יחיד

עבור $a=0,1$ אינסוף פתרונות

עבור $a=-1$ אין פתרונות

סעיף ב':

מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

זו כבר מדורגת קנונית, נציב $y = t$

$$x = -t$$

$$z = 0$$

והפתרון הכללי הוא

$$(-t, t, 0) = t(-1,1,0)$$

סעיף ג':

מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $z = t$ ולכן

$$x = -1 - t$$

$$y = t$$

$$z = t$$

$$(-1 - t, t, t) = (-1,0,0) + t(-1,1,1)$$

שאלה 2

נביט בהעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת

$$T(1,2) = T(1,1)$$

סעיף א':

מצאו את $T(0,1)$

$$T(1,2) - T(1,1) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$$

$$(0,0) = T\big((1,2) - (1,1)\big) = T(0,1)$$

סעיף ב':

הוכיחו כי המטריצה המייצגת $[T]$ אינה הפיכה.

נסמן $T(1,0) = (a, b)$ ויחד עם סעיף א' מתקיים כי

$$[T] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\det([T]) = 0$$

והמטריצה, אכן, אינה הפיכה.

נתון בנוסף כי $T(1,1)=(-1,4)$

נמצא ראשית את המטריצה המייצגת

$$T(1,0)=T\big((1,1)-(0,1)\big)=T(1,1)-T(0,1)=(-1,4)-(0,0)$$

ולכן

$$[T]=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

סעיף ג': מצאו את $T(2,3)$

$$T(2,3)=[T]\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$$

סעיף ד': מצאו את $T\big(T(x,y)\big)$

$$T\big(T(x,y)\big)=[T][T]\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-4x\end{pmatrix}$$

$$T\big(T(x,y)\big)=(x,-4x)$$