# משטחי סיבוב

נקודת המוצא שלנו היא עקומה $C$, במישור $[xz]$, עם פרמטריזציה $\begin{aligned} x &= f(\phi) \\ z &= g(\phi) \end{aligned}$ $a \le \phi \le b$.

עכשיו, נחשוב על העקומה במרחב תלת מימדי. הפרמטריזציה עכשיו היא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\phi) \\ 0 \\ g(\phi) \end{pmatrix}$$

נשתמש במטריצת סיבוב סביב ציר $z$ $R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. נשים לב שציר ה$[z]$ נשאר במקומו: $\hat{z} = R_z(\theta) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\hat{z}}$.

נפעיל את מטריצת הסיבוב על העקומה:

$$R_z(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\theta) \\ 0 \\ g(\theta) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f(\phi)\cos\theta \\ f(\phi)\sin\theta \\ g(\phi) \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a \le \phi \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{aligned}$$

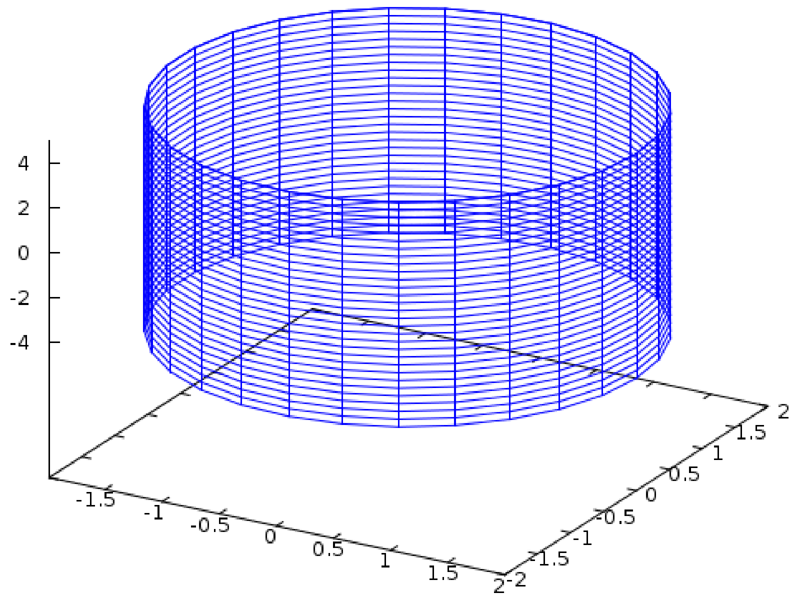
זאת הפרמטריזציה של משטח הסיבוב של $C$, $M$.

## דוגמאות

1. $C$ היא קו ישר, מהסוג $x = a > 0$. מקבלים גליל.

   פרמטריזציה של העקומה $C$ היא $-\infty < \phi > \infty$ $C : \begin{aligned} x \equiv a &= f(\phi) \\ z = \phi &= g(\phi) \end{aligned}$. אחרי הסיבוב מתקבלת פרמטריזציה:

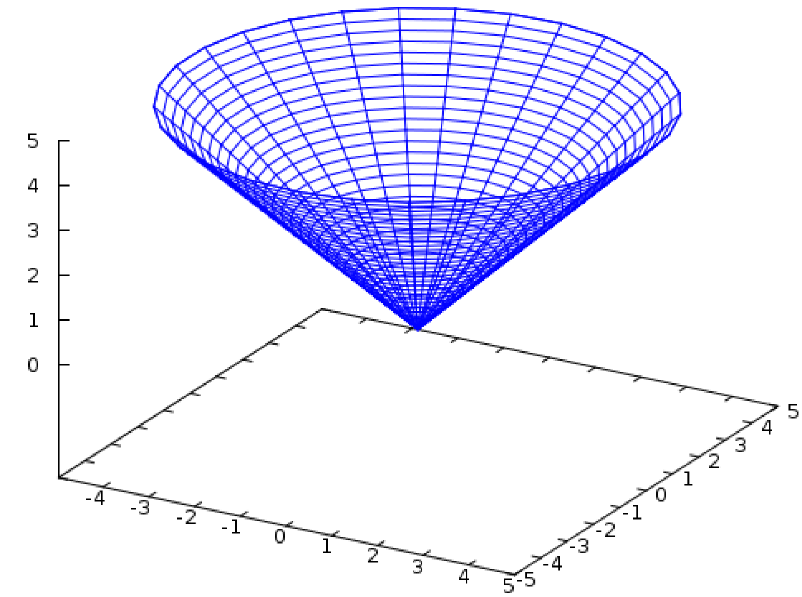
$$r(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} f(\phi)\cos\theta \\ f(\phi)\sin\theta \\ g(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ \phi \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -\infty < \phi < \infty \\ 0 < \theta < 2\pi \end{aligned}$$




2. קו משופע $x=z$ : $C$ יוצא חרוט. פרמטריזציה עבור $C$ היא $0<\phi<\infty$. פרמטריזציה עבור $M$:

$$\begin{aligned} x&=\phi \\ z&=\phi \end{aligned}$$

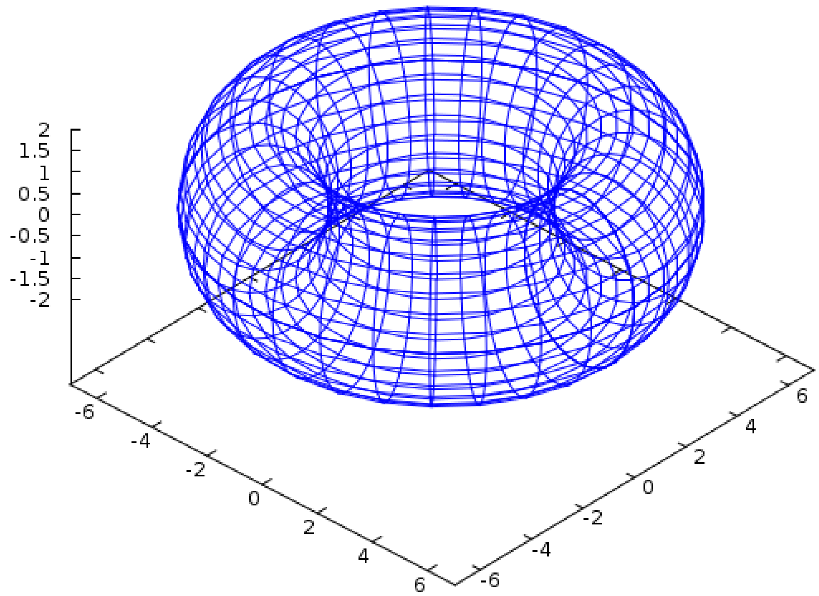
$$r\left(\theta,\phi\right)=\begin{pmatrix}\phi\cos\theta\\ \phi\sin\theta\\ \phi\end{pmatrix}\qquad\begin{array}{l}0<\phi<\infty\\ 0\leq\theta\leq2\pi\end{array}$$




3. מעגל במישור $[xz]$ שרדיוסו $b$ ומרכזו $(a,0)$ ־ מקבלים טורוס. פרמטריזציה עבור $C$
היא $0\le\phi\le2\pi$ $\begin{matrix} x=a+b\cos\phi \\ z=b\sin\phi \end{matrix}$ . חשוב ש$b<a$.

הפרמטריזציה עבור משטח הסיבוב:

$$M:\begin{pmatrix} f(\phi)\cos\theta \\ f(\phi)\sin\theta \\ g(\phi) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a+b\cos\phi)\cos\theta \\ (a+b\cos\phi)\sin\theta \\ b\sin\phi \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0\le\phi\le2\pi \\ 0\le\theta\le2\pi \end{matrix}$$




## תרגיל

אם $\phi$ הוא פרמטר טבעי עבור העקומה $\begin{matrix} x = f(\phi) \\ z = g(\phi) \end{matrix} \; : C$, אזי התבנית היסודית הראשונה של משטח הסיבוב $M$ היא

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## פתרון

פרמטריזציה עבור $M$ היא

$$M : r(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} f(\phi)\cos\theta \\ f(\phi)\sin\theta \\ g(\phi) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a \le \phi \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$$

$$r_{,1} = \frac{\partial r}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -f(\theta)\sin\theta \\ f(\phi)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_{,2} = \frac{\partial r}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} f'(\phi)\cos\theta \\ f'(\phi)\sin\theta \\ g'(\phi) \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \langle r_{,1}, r_{,1} \rangle = f^2(\phi) \qquad g_{12} = 0 = g_{21} \qquad g_{22} = f'^2(\phi) + g'^2(\phi)$$

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & f'^2 + g'^2 \end{pmatrix}$$

אבל $f'^2 + g'^2$, ולכן $G = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

# סימני כריסטובל וקווים גיאודזיים

יהי $M$ משטח רגולרי. הנורמל הוא $\hat{n} = \frac{r_{,1} \times r_{,2}}{\|r_{,1} \times r_{,2}\|}$. הווקטורים $\{r_{,1}, r_{,2}, \hat{n}\}$ הם בת"ל, ולכן בסיס ל$\mathbb{R}^3$. זאת אומרת שוקטור ב$\mathbb{R}^3$ יכול להיכתב כצירוף לינארי **יחיד** של שלושתם.

עבור וקטורי הנגזרות השניות מתקיים

$$\begin{aligned} r_{,11} &= \Gamma^1_{11} r_{,1} + \Gamma^2_{11} r_{,2} + b_{11}\hat{n} \\ r_{,12} = r_{,21} &= \Gamma^1_{12} r_{,1} + \Gamma^2_{12} r_{,2} + b_{12}\hat{n} \\ r_{,22} &= \Gamma^1_{22} r_{,1} + \Gamma^2_{22} r_{,2} + b_{22}\hat{n} \end{aligned}$$

ובאופן כללי:

$$r_{,ij} = \Gamma^1_{ij} r_{,1} + \Gamma^2_{ij} r_{,2} + b_{ij}\hat{n}$$

ובסימוני איינשטיין

$$r_{,ij} = \Gamma^k_{ij} r_{,k} + b_{ij}\hat{n}$$

למה המקדם השלישי הוא דווקא $b_{ij}$? נסמן במקומו $x$: $r_{,ij} = \Gamma^k_{ij} r_{,k} + x\hat{n}$:

$$\langle r_{,ij}, \hat{n} \rangle = \left\langle \cancel{\Gamma^1_{ij} r_{,1}} + \cancel{\Gamma^2_{ij} r_{,2}} + x\hat{n}, \hat{n} \right\rangle = \langle x\hat{n}, \hat{n} \rangle$$

זוהי ההגדרה ה**סתומה** לסימני כריסטובל $\Gamma^k_{ij}$:

$$\langle r_{,ij}, \hat{n} \rangle = "x" \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle \qquad x = \langle r_{,ij}, \hat{n} \rangle = b_{ij}$$

וזוהי בדיוק ההגדרה ל$b_{ij}$, מקדמי התבנית היסודית השנייה $B$.

ישנה נוסחה מפורשת לסימני כריסטובל:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \left( g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m} \right)$$

אינדקסים למעלה פירושם מטריצה הופכית. כלומר אם $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ אז $G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$.

אם יש לנו עקומה $\gamma : [a,b] \to U \subseteq \mathbb{R}^2$ ומפה $r : U \to M \subseteq \mathbb{R}^3$, אזי $\rho = r \circ \gamma$ נותן עקומה במרחב - $\rho : [a,b] \to M \subseteq \mathbb{R}^3$.
חישוב מפרך נותן

$$\rho'' = \left(\ddot{\gamma}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j\right) r_{,1} + \left(\ddot{\gamma}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j\right) r_{,2} + \left(b_{ij}\ddot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j\right)\hat{n}$$

אם $\rho''$ פרופורציונלי לנורמל $\hat{n}$ בלבד(כלומר המקדמים של $r_{,1}, r_{,2}$ הם אפס), אומרים ש$\rho$ היא עקומה גיאודזית. זה נותן שתי משוואות דיפרנציאליות על $\gamma$:

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0 \\ \dot{\gamma}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0 \end{cases} \implies \boxed{\forall_{k=1,2}\ddot{\gamma}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0}$$

## דוגמאות

1. מישור $[xy]$: פרמטריזציה למישור היא $r\left(u,v\right) = \left(u,v,0\right)$.

$$r_{,1} = (1,0,0) \qquad r_{,2} = (0,1,0)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$r_{,ij} \equiv 0$$

$$0 = r_{,ij} = \underbrace{\Gamma^1_{ij}}_{0} r_{,1} + \underbrace{\Gamma^2_{ij}}_{0} + \underbrace{b_{ij}}\,\hat{n}$$

סימני כריסטובל ומקדמי התבנית היסודית השנייה כולם אפס:

$$\Gamma^k_{ij} \equiv 0 \qquad b_{ij} \equiv 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

אופרטור הצורה:

$$S = G^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עקמומיות גאוס:

$$K = \det S = 0$$

והממוצעת:

$$H = \frac{1}{2}\text{tr } S = 0$$

המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^1 = 0 \\ \ddot{\gamma}^2 = 0 \end{cases}$$

במקרה של מישור יותר מקובל לסמן $\begin{matrix} \gamma^1 = x \\ \gamma^2 = y \end{matrix}$ . המשוואות הגאודזיות:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 & \Longrightarrow & \dot{x} = v_1 & \Longrightarrow & x = x_0 + v_1 t \\ \ddot{y} = 0 & \Longrightarrow & \dot{y} = v_2 & \Longrightarrow & y = y_0 + v_2 t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_1 t \\ y_0 + v_2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

קווים ישרים = וקטור כיוון $\cdot\ t$ + נקודת מוצא

מסקנה: במקרה של מישור, הקווים הגיאודזיים הם כל הישרים.