פתרון תרגיל בית 10 באלגברה מופשטת 1

88-211 סמסטר א' תשע"ו

1. קבע האם הפעולות הבאות של חבורה G על $\mathbb{R}^2$ היא פעולה של חבורה על קבוצה. באם כן, תארו את המסלול של $(0,1)$ ושל $(1,1)$.

(א) $G=\mathbb{R}$ עם הפעולה $t*(x,y)=(x+t,y+2t)$.
פתרון:

$$(t+s)*(x,y)=(x+t+s,y+2(t+s))=(x+t+s,y+2t+2s)=s*(x+t,y+2t)=t*(s*(x,y))$$

$$0*(x,y)=(x+0,y+0)=(x,y)$$

ולכן זו פעולה של חבורה על קבוצה. נתאר את המסלולים:
$orb\,(0,1)\ =\ \{t*(0,1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\ =\ \{(t,1+2t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ (זהו הגרף של הישר $y=1+2x$).
$orb\,(1,1)\ =\ \{t*(1,1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\ =\ \{(1+t,1+2t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ (זהו הגרף של הישר $y=2x-1$).

(ב) $G=\mathbb{Z}$ עם הפעולה $t*(x,y)=(tx,t^2y)$.
פתרון:
זו לא פעולה של חבורה על קבוצה. למשל $0*(x,y)=(0,0)\neq(x,y)$.

(ג) $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ עם פעולה $A*(x,y)=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.
פתרון:
זו פעולה של חבורה על קבוצה (כידוע מלינארית). נתאר את המסלולים:

$$orb\,(0,1)=\left\{A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,|\,A\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\right\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$$orb\,(1,1)=\left\{A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\,|\,A\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\right\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

2. תהי G חבורה כלשהי. נסתכל על קבוצת הפונקציות $X=\{f\,:\,G\to\mathbb{C}\}$.

(א) הוכיחו כי G פועלת על X ע"י $(g*f)(a)=f(ag)$ לכל $a\in G$.
פתרון:
צריך להראות שיוויון בין הפונקציות $g_1g_2*f=g_1*g_2*f$.
לכל $a\in G$:

$$(g_1g_2*f)(a)=f(ag_1g_2)=(g_2*f)\,(ag_1)=(g_1*(g_2*f))\,(a)$$

צריך להראות גם שיוויון בין הפונקציות $e*f=f$
לכל $a\in G$:

$$\left(e*f\right)\left(a\right)=f(ae)=f(a)$$

(ב) הוכיחו שהפונקציות הקבועות הן נקודת שבת של X .

פתרון:
נניח f פונקציה קבועה $f(a)=k$ לכל $a\in G$. אזי לכל $g\in G$ מתקיים $\left(g*f\right)\left(a\right)=f(ag)=k$. ולכן $g*f=f$ (היא בדיוק אותה הפונקציה הקבועה).

(ג) חשבו את המייצב של

$$\begin{aligned}\chi:G &\rightarrow \mathbb{C}\\ e &\mapsto 1\\ e\neq g &\mapsto 0\end{aligned}$$

פתרון:
נקח $e\neq g\in G$, $\left(g*\chi\right)\left(e\right)=\chi(eg)=0$ ולכן $g*\chi\neq\chi$. ולכן המייצב של χ הוא רק e.

3. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. נתונים $x,y\in X$ ו־$g\in G$ כך ש $g*x=y$ הוכיחו כי $\mathrm{Stb}(y)=g\mathrm{Stb}(x)g^{-1}$.
פתרון:
יהי $a\in\mathrm{Stb}(x)$ אזי $a*x=x$. נפעיל את gag^{-1} על y ונקבל $gag^{-1}*y=ga*x=g*x=y$ ולכן $gag^{-1}\in\mathrm{Stb}(y)$.
הכיוון השני נובע באופן סימטרי, ע"י שימוש ב $g^{-1}*y=x$.

4. הכלילו את הטענה שראינו בכיתה: אם G חבורה מסדר p^k כאשר p ראשוני, פועלת על קבוצה X, כאשר $p\nmid|X|$. אזי לX יש נקודת שבת.

5. השתמשו בתרגיל הקודם והוכיחו: אם G חבורה מסדר p^k כאשר p ראשוני, אזי $Z(G)\neq\{e\}$.
פתרון:
שוב נסתכל על פעולת ההצמדה. נשים לב שGפועלת על $X=G-\{e\}$ (כי אין אף איבר שצמוד ליחידה).
נשים לב ש $p\nmid|X|=p^k-1$ ולכן אין ב X נקודת שבת.
כלומר לכל $x\in G-\{e\}$ מתקיים $gxg^{-1}\neq x$ לכל $g\in G$ כלומר ש $x\notin Z(G)$.
ולכן בעצם $Z(G)=\{e\}$.

6. אומרים שפעולה של חבורה G על קבוצה X , שהיא מגודל לפחות 2 , היא $2-$טרנזיטיבית אם לכל רביעיית איברים $x_1\neq x_2,y_1,\neq y_2\in X$ קיים $g\in G$ כך ש $g*x_1=y_1$ וגם $g*x_2=y_2$.

(א) הוכיחו כי להיות $2-$ טרנזיטיבי שקול לכך ש G פועלת טרנזיטיבית על $X\times X\setminus\Delta$. כאשר $\Delta=\{(x,x)\,|\,x\in X\}$ ו G פועלת על המכפלה רכיב־רכיב.

פתרון:

יהיו $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X\times X\setminus\Delta$ כלומר $x_1\neq x_2$ ו$y_1\neq y_2$.

אם הפעולה של G היא $2-$ טרנזיטיבית אז קיים $g\in G$ כך ש $g*x_1=y_1$ ו$g*x_2=y_2$. ולכן $(y_1,y_2)=(g*x_1,g*x_2)=g*(x_1,x_2)$.

ובכיוון השני, אם $x_1\neq x_2$ ו$y_1\neq y_2$ אז $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X\times X\setminus\Delta$ וקיים $g\in G$ כך ש $g*(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$ מה שאומר ש $g*x_i=y_i$.

(ב) הוכח כי אם G פועלת $2-$ טרנזיטיבית על X אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

פתרון:

לכל שני איברים $x,y\in X$ ניקח איבר $x\neq z\in X$ (קיים כזה לפי הדרישה על הגודל של X).

נתבונן בזוגות $x\neq y$ ו $x\neq z$, מכיוון שהפעולה היא $2-$טרנזיטיבית יש $g\in G$ כך ש $g*x=y$ (וגם $g*z=x$ אבל זה לא חשוב).

(ג) הראה ש $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ פועלת טרנזיטיבית על $\mathbb{F}^2-\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$, אבל לא $2-$טרנזיטיבית.

פתרון:

בשביל טרנזיטיביות, מספיק להראות שיש וקטור שהמסלול שלו הוא כל $\mathbb{F}^2-\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$(למה?).

נראה עבור הוקטור $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

נקח וקטור כלשהו $v\in\mathbb{F}^2-\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ ונשלים אותו לבסיס (אפשר, כי הוא לא אפס) $\{v,w\}$.

ידוע ממשפט ההגדרה (מהקורס אלגברה לינארית) שקיימת העתקה לינארית שמעבירה את $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ לל v ואת $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ללw.

מכיוון ש$\{v,w\}$ הוא בסיס אז ההעתקה הזו היא הפיכה, ולכן המטריצה המייצגת שלה תהיה מ$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$.

הפעולה היא לא 2 טרנזיטיבית, כי למשל אם ניקח $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ ו־ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

אזי אין מטריצה A כך ש $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ וגם $2A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

7. ניתן לצבוע קודקודי משולש בכל אחד מ3 צבעים שונים (אפשר להשתמש באותו צבע כמה פעמים שרוצים). כמה צביעות שונות יש?
שימו לב שמשולש נחשב אותו משולש כאשר מסובבים או משקפים אותו כרצוננו.