חוגים, שיעור 3

<u>הגדרה</u> R חוג, S תת-קבוצה.
S היא אידאל שמאלי (ימני) אם

1) S סגור לחיבור. } $(S,+)$ תת-חבורה של $(R,+)$
2) $a\in S \Rightarrow -a\in S$.
3) $ra\in S$ לכל $a\in S$, $r\in R$. (שמאלי)
($ar\in S$ " ") (ימני)

אידאל = אידאל דו-צדדי = גם שמאלי וגם ימני.

<u>דוגמאות</u> 1) R חוג כלשהו. $I=R$ אידאל.

אידאל $I\subsetneq R$ נקרא אמיתי.

0) R חוג, $I=\{0\}$.

1) R חוג, $A\subseteq R$ תת-קבוצה.

$$RA=\{r_1a_1+\dots+r_na_n : r_i\in R,\ a_i\in A,\ n\in\mathbb{N}\}$$

אידאל שמאלי.

$$\sum r_ia_i+\sum r_i'a_i=\sum (r_i+r_i')a_i\in RA$$

$$r\sum r_ia_i=\sum (rr_i)a_i\in RA$$

RA נקרא האידאל השמאלי הנוצר ע"י A.

RA הינו אידאל שמאלי הנוצר ע"י A.

$$AR = \{a_1 r_1 + \dots + a_n r_n : \begin{matrix} a_i \in A \\ r_i \in R \end{matrix}\}$$

אידאל ימני נוצר ע"י A.

$$(A) = RAR = \{r_1 a_1 r_1' + \dots + r_n a_n r_n' : \begin{matrix} a_i \in A \\ r_i \in R \\ r_i' \in R \end{matrix}\}$$

אידאל נוצר ע"י A.

אם R חילופי $RA = AR = RAR$

<u>הגדרה</u> יהי I אידאל. קבוצה $A \subseteq R$ נקראת קבוצה יוצרת אם $I = (A)$. לפעמים, $A = I$ עובד.

אם ל-I יש קבוצה יוצרת סופית, אומרים כי I נוצר סופית.

אם יש קבוצה יוצרת $A = \{a\}$ בעלת איבר אחד, אומרים כי I ראשי. principal ideal

<u>דוגמאות</u> 2) $R = M_n(\mathbb{R})$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

$$Ra = \{Ma : M \in M_n(\mathbb{R})\} =$$

{מטריצות עם עמודה הראשונה של אפסים}

$M + Ra =$ {המטריצות עם עמודה הראשונה כמו של M}

$aR = \{aM : M \in M_n(\mathbb{R})\} =$

{מטריצות עם
שורה ראשונה אפסים}

אם ננסה להגדיר $R/_{Ra}$, נקבל לא מוגדר היטב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

לא
מוגדר
היטב!

3) $R = R'[x]$, R' חוג חילופי

$I = (x^2) = \{f \cdot x^2 : f \in R[x]\}$

$$I = \left\{\sum_{n=0}^{k} a_n x^n : a_0 = a_1 = 0\right\}$$

$$= \left\{\sum_{n=2}^{k} a_n x^n\right\}$$

$f = \sum b_i x^i \qquad f + I = \{b_0 + b_1 x + a(x^2)\}$

$$(a_0 + a_1 x + \dots)(b_0 + b_1 x + \dots) =$$

$$a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \dots$$

$Rx^2 = x^2 R$

כי $x^2 \in Z(R) = \{a \in R : ar = ra \ \forall r \in R\}$

R חילופי $\iff R = Z(R)$.

R לא חילופי $\Leftarrow$ $Z(R)$ לא אידאל, כי $1 \in Z(R)$.

למה R חוג, $a\in Z(R)$, $A\subseteq Z(R)$ $\Leftarrow$ $RA=AR$ אידיאל דו-צדדי.

4) R חוג, $I,J\triangleleft R$ אידיאלים (או שמאליים, או ימניים) אזי $I\cap J$ אידיאל (או שמאלי או ימני)

$I\triangleleft R$	אידיאל
$I\leq_{\ell} R$	אידיאל שמאלי
$I\leq_{r} R$	ימני

$$I+J=\{i+j : i\in I,\ j\in J\}$$

אידיאל/שמאלי/ימני

$$IJ=\{ij : i\in I,\ j\in J\}$$ נוצר ע"י

אבל $I,J\triangleleft R \Leftarrow IJ\subseteq I\cap J$

הגדרה R חוג. איבר $a\in R$ נקרא נילפוטנטי אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $a^n=0$.

5) R חוג קומוטטיבי. הרדיקל הנילפוטנטי (nilradical) של R הוא

$$\eta(R)=\{a\in R : a \text{ נילפוטנטי}\}$$

למה $\eta(R)\triangleleft R$: יהי $a\in\eta(R)$, $a^n=0$.

$$ra\in\eta(R) \Leftarrow (ra)^n \underset{\text{חילופי}}{=} r^n a^n = r^n 0 = 0$$

סגירות לחיבור: $a,b\in\eta(R)$ $b^m=0$, $a^n=0$.

$$(a+b)^{n+m-1}=\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m-1}{k}_R a^k b^{n+m-k-1}$$

כל מחובר שווה לאפס, אכן,

$$a^k=\underbrace{a^n}_{0}\cdot a^{k-n}\Leftarrow k\geq n$$

$$b^{n+m-k-1}=0\Leftarrow n+m-k-1\geq m\Leftarrow n<k$$

הוכחנו $(a+b)\in\eta(R)$.

6) יהי $f:R\to S$ הומו' של חוגים.

יהי $I\lhd S$ (אי' שמאלי, או ימני).

המקור $f^{-1}(I)=\{a\in R: f(a)\in I\}$

אידיאל/שמאלי/ימני של R.

<u>הוכחה</u>

$a\in f^{-1}(I)$

$r\in R$ $\quad f(ra)=\underbrace{f(r)}_{\in S}\underbrace{f(a)}_{\in I}\in I$

כי I אידיאל שמאלי,

7) $f:R\to S$ הומו'. יהי $R'\leq R$ תת-חוג בלי-יחידה

אז $f(R')\leq S$ תת-חוג-בלי-יחידה.

$a,b\in f(R')$ $\quad c,d\in R'$ $\quad a=f(c)$, $b=f(d)$ $\Rightarrow ab=f(\underbrace{cd}_{\in R'})$

אזהרה $f:R\to S$ הומ' של חוגים, תמונה של אידאל לא בהכרח אידאל.

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[x]$ $\qquad f(2\mathbb{Z})=\{a_0 : a_0\in 2\mathbb{Z}\}$

אם זה היה אידאל, הוא היה מכיל $2x^5$.

8) אם $f:R\to S$ הומ' על (אפימורפיזם) אז:
$I\le R$ אידאל/שמאלי/ימני $\Leftarrow$ $f(I)$ אידאל/שמאלי/ימני

I שמאלי $\Leftarrow$ $a\in f(I)$ $\quad f(a')=a$ $\quad a'\in I$

$r\in R$ $\quad f(r)\underset{f\text{ על}}{=}s\in S$

$sa=f(\underbrace{ra'}_{\in I})\in f(I)$ $\Leftarrow$ $f(I)$ אידאל שמאלי!

משפט האיזו' הרביעי: יהי R חוג, $I\trianglelefteq R$
אידאל. תהי $f:R\to R/I$ ההטלה הטבעית.
$f(r)=r+I$

יש התאמה חח"ע ועל

$$\left\{\begin{matrix}\text{אידאלים/שמאליים/ימניים}\\ \text{של } R/I\end{matrix}\right\}\longleftrightarrow\left\{\begin{matrix}\text{אידאלים/שמאליים/ימניים}\\ \text{של } R \text{ שמכילים}\\ \text{את } I\end{matrix}\right\}$$

$L \trianglelefteq R/I \longrightarrow I \subseteq f^{-1}(L)$

(כי f על) $f(J) \trianglelefteq R/I \longleftarrow I \subseteq J \trianglelefteq R$

כי f על: $L = f(f^{-1}(L))$

$f^{-1}(f(J)) \supseteq J$

מצד שני, יהי $a \in f^{-1}(f(J))$. אזי $f(a) \in f(J)$

$\Leftarrow$ קיים $j \in J$ כך ש- $f(a) = f(j)$ $\Leftarrow$ $f(a-j) = 0_{R/I}$

$\Leftarrow a - j \in I \subseteq J \Leftarrow a \in J \Leftarrow$

$f^{-1}(f(J)) = J$.