מערך תרגול 2 מופשטת 3

בניות בסרגל ומחוגה

נתאר איזשהוא "משחק" גיאומטרי. החוקים שלו הם כאלה:

אם נחשוב על כל הנקודות, הישרים והמעגלים במישור אז יש כאלה שאנחנו יכולים לבנות וכאלה שאנחנו לא יכולים לבנות.

מה אנחנו יכולים לבנות? יש כמה חוקים

- בהינתן שתי נקודות P, Q שניתנות לבניה, אפשר לבנות את הקו הישר העובר בינהן.
- בהינתן שלוש נקודות P, Q, R שניתנות לבניה, אפשר לבנות את המעגל שמרכזו ב R ורדיוסו הוא המרחק בין Q ל P.
- בהינתן שני ישרים/מעגלים/מעגל וישר הניתנים לבניה, אפשר לבנות את נקודות החיתוך שלהם.
- קיימות שתי נקודות שונות P, Q הניתנות לבניה. אפשר לקרוא להן שרירותית $(0,0)$ ו $(1,0)$.

בעולם העתיק שאלו הרבה שאלות בסגנון:

- נתון ישר l ונקודה P מחוץ לישר, האם ניתן לבנות בסרגל ומחוגה משיק ל l העובר דרך P?
- בהינתן זוית (שנתונה ע"י שני ישרים שיוצרים קרן) האם ניתן לבנות ישר החוצה אותה ל2? ל 3? ל n?
- האם ניתן לבנות מצולע משוכלל בעל n צלעות?

וכו'

שאלה 2.1 למה בניות בסרגל ומחוגה מעניינות אותנו בחיים?

תשובה: אני לא חושב שיש לשאלות כאלה שימושים מודרניים אבל הם היו אחת המוטיבציות לפיתוח של תורת השדות. אנחנו נראה שהכלים שנלמד בקורס מסוגלים לפתור בעיות כאלה, שהעסיקו את המתמטיקה הרבה שנים.

הגדרה 2.2 המספר $a \in \mathbb{R}$ הוא ניתן לבניה אם $(a,0)$ ניתן לבניה לפי החוקים שלמעלה.

מסתבר שאת כל השאלות האלה אפשר לתרגם לשאלה לגבי האם מספרים ניתנים לבניה. למשל אפשר להוכיח שמצולע משוכלל עם n צלעות ניתן לבניה אם ורק אם $\cos\frac{2\pi}{n}$ הוא מספר ניתן לבניה.

אנחנו נאפיין מספרים ניתנים לבניה בהמשך הקורס. כרגע נציין שמספרים ניתנים לבניה מהווים שדה.

תרגיל 2.3 יהיו P, Q נקודות נתונות. בנה את נקודת אמצע הקטע.

פתרון: נשרטט מעגל שמרכזו ב P ורדיוסו באורך PQ. נשרטט מעגל שמרכזו ב Q ורדיוסו באורך PQ. מעגלים אלו נחתכים בשתי נקודות x, y. כעת נעביר את הקו הישר xy. החיתוך של xy עם הישר PQ זו הנקודה שאנחנו רוצים.

תרגיל 2.4 נניח כי a, b ניתנים לבניה. הראו כי $a + b$ ניתן לבניה.

פתרון: ניקח מעגל ברדיוס b שמרכזו ב (a, b) הוא חותך את ציר x ב $(a + b, 0)$.

תרגיל 2.5 הוכיחו כי ניתן לבנות מצולע משוכלל עם n צלעות אם ורק אם המספר $\cos \frac{2\pi}{n}$ ניתן לבניה.

פתרון: נניח שניתן לבנות כזה מצולע משוכלל. נביט על הקודקוד ה"ראשון" מעל ציר x (אם זזים נגד כיוון השעון). נוריד ממנו אנך לציר x. הוא פוגש אותו בדיוק ב $(\cos \frac{2\pi}{n}, 0)$. בכיוון השני, נצייר אנך לציר x העובר דרך $(\cos \frac{2\pi}{n}, 0)$. נצייר מעגל ברדיוס 1 שמרכזו בראשית הצירים, הם נפגשים בקודקוד של המצולע, שאר הקודקודים נבנים בדרך דומה.

הכנה לקרובות

עד סוף התרגול נעשה תרגילים שיכינו אותנו להמשך הקורס.

תרגיל 2.6 מצאו את ה $\gcd$ (מחלק משותף מירבי) ב $\mathbb{Q}[x]$ של הפולינומים $f(x) = x^2 - x - 3$ ו $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

פתרון: נשתמש באלגוריתם אוקלידס (שעובד ב $\mathbb{Q}[x]$ כי הוא תחום אוקלידי). אני מקווה שראיתם אותו כבר באיזשהוא קורס. עושים חילוק עם שארית:

$$x^3 - 2x^2 + 1 = (x^2 - x - 3)(x - 1) + 2x - 2$$

$$x^2 - x - 3 = (2x - 2)\frac{1}{2}x - 3$$

קיבלנו בסוף -3 שהוא הפיך וזה אומר ש $\gcd(f(x), g(x)) = 1$ כלומר הם זרים.

תרגיל 2.7 בהמשך לתרגיל הקודם. בטאו את ה $\gcd$ כצירוף לינארי של $f(x), g(x)$.

פתרון: ממשיכים עם האלגוריתם הרגיל ועושים הצבה לאחור:

$$-\frac{1}{3}(x^2 - x - 3) + (2x - 2)\frac{1}{6}x = 1$$

$$-\frac{1}{3}(x^2 - x - 3) + (x^3 - 2x^2 + 1 - (x^2 - x - 3)(x - 1))\frac{1}{6}x = 1$$

כלומר

$$\frac{1}{6}x(x^3 - 2x^2 + 1) - (\frac{1}{6}x(x - 1) + \frac{1}{3})(x^2 - x - 3) = 1$$

תרגיל 2.8 חשבו את ההופכי של x^3-2x^2+1 בשדה $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-x-3\rangle$.

פתרון: ראשית נזכור שהאיברים בשדה הם מהצורה

$$f(x)+\langle x^2-x-3\rangle$$

כלומר הכל עובד "עד כדי" x^2-x-3. לפי התרגילים הקודמים למעשה

$$x^3-2x^2+1+\langle x^2-x-3\rangle=2x-2+\langle x^2-x-3\rangle$$

וההופכי הוא

$$\frac{1}{6}x+\langle x^2-x-3\rangle$$

תזכורת 2.9 נניח ש F,K שדות כך ש $F\subseteq K$ (זה נקרא הרחבת שדות). ניקח $a\in K$, אז $F(a)$ (הסיפוח של a ל F) הוא התת שדה הכי קטן של K שמכיל גם את F וגם את a.

יצור כזה חייב להיות קיים כי הוא החיתוך של כל התת שדות שמכילים גם את F וגם את a. חשוב להדגיש את התכונה (הפשוטה אך) החשובה הבאה: אם L תת שדה של K כך ש $F\subseteq K$ וגם $a\in L$ אז $F[a]\subseteq K$.

שווה גם להדגיש כי $F(a)=F$ אם ורק אם $a\in F$.

דוגמא 2.10 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$. הסבר: צריך רק לוודא שהוא סגור לכפל לחיבור ולהופכי ואז זה תת שדה של $\mathbb{R}$, מצד שני ברור שכל שדה שמכיל את $\mathbb{Q}$ו $\sqrt{2}$ מכיל גם את השדה הזה.

תרגיל 2.11 הוכיחו כי $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

פתרון: נניח בשלילה ש $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ אז קיימים $a,b\in\mathbb{Q}$ עבורם

$$\sqrt{6}=a+b\sqrt{2}$$

לא ייתכן ש $b=0$ כי $\sqrt{6}$) לא רציונלי) ומאותה סיבה לא ייתכן ש $a=0$. נעלה משוואה זו בריבוע ונקבל

$$6=a^2+2\sqrt{2}ab+2b^2$$

כלומר

$$\sqrt{2}=\frac{6-a^2-2b^2}{2ab}$$

מותר לחלק כי כבר ראינו ש $ab\neq 0$. ולכן $\sqrt{2}$ רציונלי, סתירה.

הערה 2.12 כמו שאפשר לספח איבר אחד, אפשא לספח כמה איברים, והעיקרון דומה.

תרגיל 2.13 האם $\sqrt{2}i \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}+i]$?

פתרון: על פניו אפשר לחשוד שלא, כמו בתרגיל הקודם. אבל בעצם

$$(\sqrt{2}+i)^2 = 2+2\sqrt{2}i-1 = 1+2\sqrt{2}i$$

נחסר 1 ונחלק ב 2 (פעולות שמשאירות אותנו בתוך השדה) ונקבל ש

$$\sqrt{2}i \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}+i]$$

.