פתרונות לשאלות לדוגמא

1. בשני הסעיפים הראשונים נשתמש בסווג ע"י הדטרמיננטה.

א. כאן המטריצה היא $A=\begin{bmatrix}3&2\\2&2\end{bmatrix}$, מכאן $\det A=2>0$ ולכן זו אליפסה (אולי דמיונית)

ב. $A=\begin{bmatrix}3&4\\4&1\end{bmatrix}$, מכאן $\det A=-13<0$ ולכן זו היפרבולה.

ג. יש איבר מעורב (xz) ולכן נלכסן את המטריצה $A=\begin{bmatrix}2&0&-1/2\\0&1&0\\-1/2&0&2\end{bmatrix}$. הע"ע שלה הם $\lambda_{1,2,3}=1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}$, והו"ע המנורמלים הם בהתאמה $v_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$. מכאן שהמטריצה המלכסנת היא $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$. נחליף משתנים ע"י $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$.

המשוואה החדשה היא $x'^2+\frac{5}{2}y'^2+\frac{3}{2}z'^2=-1$. זהו אליפסואיד (דמיוני)

.2

א. נגזור, $\gamma'(t)=\left(-e^{-t/2}(\cos t+2\sin t),-e^{-t/2}(\sin t-2\cos t)\right)$. הנורמה של הנגזרת היא $\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{5}e^{-t/2}$. נשתמש בנוסחה $s=\int_0^t\left\|\gamma'(u)\right\|du$ ונקבל $s(t)=2\sqrt{5}\left(1-e^{-t/2}\right)$ ומכאן $t(s)=-2\log\left(1-\frac{s}{2\sqrt{5}}\right)$. נציב בפרמטריזציה המקורית ונקבל

$$\gamma(s)=2\left(1-\frac{s}{2\sqrt{5}}\right)\left(\cos\left(-2\log\left(1-\frac{s}{2\sqrt{5}}\right)\right),\sin\left(-2\log\left(1-\frac{s}{2\sqrt{5}}\right)\right)\right)$$

ב. חישוב פשוט. $L=\int_0^{4\pi}\left\|\gamma'(t)\right\|dt=\int_0^{4\pi}\sqrt{5}e^{-t/2}dt=2\sqrt{5}\left(1-e^{-2\pi}\right)$.

ג. נשתמש בנוסחה $\kappa(t)=\frac{\det\left[\gamma'(t),\gamma''(t)\right]}{\left\|\gamma'(t)\right\|^3}$. אחרי פישוט מקבלים $\kappa(t)=\frac{e^{t/2}}{\sqrt{5}}$

3. העקומה נמצאת על המישור $x+y+z=1$, ולכן הפיתול הוא $\tau \equiv 0$. החיתוך בין הספירה לבין המישור נותן **מעגל**, ואת הרדיוס שלו ניתן למצוא ע"י משפט פיתגורס במשולש שלו הצלעות הבאות: הקטע הישר בין הראשית לבין הנקודה על המישור $x+y+z=1$ הקרובה ביותר אל הראשית, רדיוס של המעגל ורדיוס של הספירה [אם זה לא ברור אפשר לשאול אותי]. $R=\sqrt{\frac{11}{3}}$. העקמומיות של מעגל היא ההופכי של הרדיוס, ז"א $\kappa=\sqrt{\frac{3}{11}}$.

4.

א. $\begin{cases} x=\phi^2+\frac{1}{4}=f(\phi) \\ z=\phi=g(\phi) \end{cases}$ כאשר $-\infty<\phi<\infty$

ב. פרמטריזציה עבור M היא $r(\theta,\phi)=\begin{bmatrix} \left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\cos\theta \\ \left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\sin\theta \\ \phi \end{bmatrix}$ בתחום $-\infty<\phi<\infty, 0\le\theta<2\pi$.

ג. זהו הסעיף הארוך ביותר. התבנית היסודית הראשונה היא $G=\begin{bmatrix} \left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^2 & 0 \\ 0 & 4\phi^2+1 \end{bmatrix}$

ומכאן $G^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\phi^2+1} \end{bmatrix}$. הנורמל המנורמל הוא $n=\frac{r_{,1}\times r_{,2}}{\left\|r_{,1}\times r_{,2}\right\|}=\frac{1}{\sqrt{1+4\phi^2}}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2\phi \end{bmatrix}$

התבנית היסודית השנייה היא $B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{1+4\phi^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{1+4\phi^2}} \end{bmatrix}$. אופרטור הצורה הוא

$S=G^{-1}B=-\frac{1}{16\sqrt{1+4\phi^2}^3}\begin{bmatrix} \frac{1}{\phi^2+\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ולו יש ע"ע

$\{\kappa_1,\kappa_2\}=\left\{-\frac{1}{4\sqrt{1+4\phi^2}^5},\frac{1}{8\sqrt{1+4\phi^2}^3}\right\}$ ברור מי הגדול מביניהם.

$\kappa_1=\frac{1}{8\sqrt{1+4\phi^2}^3},\kappa_2=-\frac{1}{4\sqrt{1+4\phi^2}^5}$. מכאן שהיחס הוא $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}=-\frac{1}{2}\left(1+4\phi^2\right)$.