תרגיל בית 1 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ט

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל.

1. יהיו n, m מספרים שלמים, ונניח $n|m$. האם בהכרח $-n|m$? האם בהכרח $-n|2m$? האם בהכרח $n \nmid m$ (כלומר m לא מחלק את n)?
2. יהי p מספר ראשוני. מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{Z}$ כך ש-$x|p$.
3. יהי n מספר טבעי. הגדרנו יחס על $\mathbb{Z}$ לפיו נאמר כי $a, b \in \mathbb{Z}$ שקולים מודולו n אם $n|a-b$, וסימנו יחס זה כ-$a \equiv b \pmod{n}$. הוכיחו כי שקילות מודולו n היא אכן יחס שקילות (כלומר יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי).

שאלות רגילות

1. יהי n מספר טבעי. נסמן את הכפולות שלו ב-$n\mathbb{Z} = \{0, \pm n, \pm 2n, \dots\}$. למשל $4\mathbb{Z} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$. נזכיר כי סימנו $\gcd(a, b) = (a, b)$.
   (א) הוכיחו כי b מחלק את a אם ורק אם $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$.
   (ב) נגדיר סכום על קבוצות כאלו לפי $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{\alpha + \beta : \alpha \in a\mathbb{Z}, \beta \in b\mathbb{Z}\}$. הוכיחו כי מתקיים $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a, b)\mathbb{Z}$.
   (ג) הוכיחו כי $((a, b) \cdot (a, c))\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} + bc\mathbb{Z}$. רמז: העזרו בסעיפים הקודמים.
2. הוכיחו כי לכל $a, n, m \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(an, am) = |a|\,(n, m)$.
3. מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס את הממ"מ הבאים:
   (א) $(88, 218)$
   (ב) $(-26400, 65400)$, רמז: העזרו בשאלה הקודמת.
4. תזכורת: יהיו n, m מספרים שלמים. הכפולה המשותפת המזערית (כמ"מ, least common multiple) שלהם מוגדרת להיות

$$\mathrm{lcm}(n, m) = [n, m] = \min\{d \in \mathbb{N} : n|d \wedge m|d\}$$

   הוכיחו:
   (א) אם $m|a$ וגם $n|a$, אז $[n, m]\,|a$.
   (ב) $|nm| = (n, m)\,[n, m]$. למשל $6 \cdot 4 = 24 = 12 \cdot 2 = (6, 4)\,[6, 4]$.
5. הוכיחו:

(א) לכל n שלם מתקיים $(4n+3, 7n+5) = 1$.

(ב) מצאו $s, t \in \mathbb{Z}$ (התלויים ב־n) כך ש־$(4n+3)s + (7n+5)t = 1$.

6. מצאו את כל המספרים השלמים n כך ש־$(n+1)|(n^2+11)$.