תרגיל 5

1. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

מצא את הפולניום האופיני של A, ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.
פתרון : נחשב

$$\begin{aligned}f_A(\lambda) &= |\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda-3&-2\\-1&-2&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda-3&-2\\-\lambda&0&\lambda\end{pmatrix}\right|\\ &= \lambda\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda-3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\right|=\lambda\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-3&\lambda-3&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\right|\\ &= \lambda\left[(\lambda-2)(\lambda-3)-6\right]=\lambda\left[\lambda^2-5\lambda\right]=\lambda^2(\lambda-5)\end{aligned}$$

ולכן ע"ע הם $0,5$.

מרחבים עצמיים: עבור $\lambda=0$

$$N(A-0I)=N(A)$$

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=0}=\left\{\begin{pmatrix}t\\-t\\t\end{pmatrix}|t\in\mathbb{R}\right\}$$

עבור $\lambda=5$

$$N(A-5I)=N(\begin{pmatrix}-4&2&1\\1&-2&2\\1&2&-4\end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 10 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=5} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2/3t \\ t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

2. יהא V מ"ו מימד סופי ותהא $T : V \to V$ ה"ל. נניח כי v_1 ו"ע של Tשל ע"ע λ_1.נניח כי v_2 ו"ע של Tשל ע"ע λ_2

(א) הוכח כי אם $v_1 + v_2$ הוא ו"ע אזי $\lambda_1 = \lambda_2$.

פתרון : נחשב

$$\lambda(v_1 + v_2) = T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

אם $\lambda \neq \lambda_1$ נוכל להמשיך כל

$$(\lambda - \lambda_1)v_1 = -(\lambda - \lambda_2)v_2$$

ואז

$$v_1 = \frac{-(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda - \lambda_1)} v_2$$

כלומר v_1כפולה של v_2 ואז יש להם אותו ע"ע .

(ב) נניח כי לכל בסיס B מתקיים כי $[T]_B$ אלכסונית. הוכח כי קיים סקלאר α המקיים

$$\forall v \in V : Tv = \alpha v$$

פתרון : יהא $v \neq 0$ נשלים אותו לבסיס $B = \{v = v_1, \ldots, v_n\}$ לפי נתון

$$[T]_B = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אלכסונית. מהעמודה הראשונה נסיק כי

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1$$

כיוון שזה נכון לכל וקטור קיבלנו כי

$$\forall v \in V : Tv = \lambda_v v$$

נותר להראות שכל ה λ_v־ים שווים. אכן ניקח v_1, v_2שונים מאפס אזי הם וקטורים עצמיים. אם $v_1 + v_2$שונה מאפס גם הוא אזי הוא ו"ע ולפי סעיף קודם $\lambda_{v_1} = \lambda_{v_2}$. אם הוא שווה אפס אזי $v_1 = -v_2$ כפולה אחד של השני ולכן גם כן מתקיים $\lambda_{v_1} = \lambda_{v_2}$.

3. יהיו $S, T : V \to V$ ה"ל הוכח כי ל ST, TS יש אותם ע"ע. (חלק למקרים: אם $\lambda = 0$ ע"ע ואם $\lambda \neq 0$ ע"ע)

פתרון : נעבוד אם מטריצות מייצגות A, B. נניח כי $ABv = 0$ כלומר יש ע"ע 0= אזי ABאינה הפיכה ולכן גם BAאינה הפיכה לכן קיים וקטור $v' \neq 0$ המקיים $BAv' = 0$ולכן 0 הוא ע"ע גם של BA.

נניח כי $\lambda \neq 0$ הוא ע"ע של AB. כלומר עבור vשונה מאפס מתקיים

$$ABv = \lambda v$$

נכפיל בBונקבל

$$BA(Bv) = \lambda(Bv)$$

אם Bv שונה מאפס אזי הוא ו"ע עם ע"ע λוסיימנו.

אכן, אם Bvשווה אפס אזי A

$$0 = A0 = ABv = \lambda v$$

כיוון ש $v \neq 0$ אזי $\lambda = 0$בניגוד להנחה.

4. תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המוגדרת

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

כלומר, כל שורה היא "סיבוב ציקלי" ימינה של השורה שמעליה. יהא $\rho \in \mathbb{C}$ המקיים $\rho^n = 1$ (כלומר שורש יחידה מסדר n). הוכח כי

$$v = \left(1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\right)$$

הוא וקטור עצמי של A. מצא את הע"ע המתאים.

פתרון : אם λ ע"ע אזי מתקיים כי

$$Av = \lambda v$$

נסמן $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \rho^{i-1}$ אזי $x = (Av)_{1,1}$. נחשב את $\rho^{n-1}(Av)_{2,1}$

$$\begin{aligned}\rho^{n-1}(Av)_{2,1} &= \rho^{n-1}\left(a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \rho^i\right) = \left(a_n \rho^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \rho^{i+n-1}\right) \\ &= a_n \rho^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \rho^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \rho^{i-1} = \lambda\end{aligned}$$

ולכן

$$(Av)_{2,1} = \frac{\lambda}{p^{n-1}} = \lambda\rho$$

באופן דומה

$$\rho^{n-i}(Av)_{i+1,1} = \lambda,\ (i = 0, 1, \dots n-1)$$

ולכן

$$(Av)_{i.1} = \frac{\lambda}{p^{n-i+1}} = \lambda\rho^{i-1}$$

ולכן

$$Av = \lambda v$$

בהצלחה!