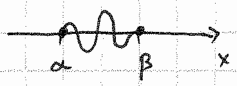
בס"ד

פונקציית גרין עבור בעי"ת שפה

בעיית שפה היא מד"ר + תנאי שפה (תנאים בנקודות שונות)

למשל: $(\alpha<\beta)$



$$\begin{cases} y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x) \\ y(\alpha)=0 \\ y(\beta)=0 \end{cases}$$

(כלומר מחפשים פתרונות למד"ר שמתאפסים בשפת הקטע $[\alpha,\beta]$)

כיצד פותרים בעיות שפה? ההומוגנית הקשורה.

עלינו למצוא שני פתרונות למד"ר √ y_1,y_2, כך שכל אחד מהם מתאפס באחת מקצוות הקטע:

$$\begin{cases} y_1(\alpha)=0 \\ y_2(\beta)=0 \end{cases}$$

ואז הפתרון הוא, כפי שנלמד בהרצאה:

$$y=\int_\alpha^\beta K(x,t)\,b(t)\,dt$$

כאשר:

$$K(x,t)=\frac{y_1(t)y_2(x)H(x-t)+y_1(x)y_2(t)H(t-x)}{W(y_1,y_2)(t)}=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{W(t)} & t\le x \\ \dfrac{y_1(x)y_2(t)}{W(t)} & t>x \end{cases}$$

$$\left(H(z)=\begin{cases} 1 & z\ge 0 \\ 0 & z<0 \end{cases} \right)$$

פונקצית הבי"ס

היא פונקציית גרין של הבע"ה.

דוגמה ב'

דוגמה: פתור את בעיית ערכי השפה:

$$\begin{cases} y''-y=b(x) \\ y(\alpha)=0 \\ y(\beta)=0 \end{cases} \qquad (\alpha<\beta)$$

פתרון: המד"ר ההומוגנית הקשורה הינה $y''-y=0$

קל לראות כי $y_1=e^x$ ו- $y_2=e^{-x}$ פתרונות שלה.

נרצה לבנות מפתרונות אלו פתרונות שיתאימו לקצוות (α ו- β)

ובכן:

$$\begin{cases} Y_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}\right)e^{x}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}\right)e^{-x} \\ Y_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}}\right)e^{x}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}}\right)e^{-x} \end{cases}$$

כזכור כל פתרון של המד"ר החמוג' הקשורה הוא מהצורה: $c_1y_1+c_2y_2$

Y_1, Y_2 פתרונות, כי הם צירוף לינארי של y_1, y_2.

ואפשר להציב ולראות שמתקיים

$$\begin{cases} Y_1(\alpha)=0 \\ Y_2(\beta)=0 \end{cases}$$

כזכור כל פתרון של המד"ר ההומוגנית הקשורה הוא מהצורה $c_1y_1+c_2y_2$

כל מה שנותר לעשות הוא להציב בנוסחה ולקבל:

$$y(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{Y_1(t)Y_2(x)H(x-t)+Y_1(x)Y_2(t)H(t-x)}{W(t)}\,b(t)\,dt=$$

$$\boxed{=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{e^{-t-x}\left((e^{2\alpha}-e^{2x})(e^{2t}-e^{2\beta})H(t-x)-(e^{2x}-e^{2\beta})(e^{2t}-e^{2\alpha})H(x-t)\right)}{2\cdot(e^{2\alpha}-e^{2\beta})}\cdot b(t)\,dt}$$

הערה: הדוגמה הזו די מסובכת, אבל היא מראה את הדרך.

בהצלחה