הרצאה 5

משפט 3.1 תהי מתקיימים את התנאים הבאים:

1. פונקציה $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ היא אנליטית בכל חצי מישור עליון $\operatorname{Im} z \geq 0$, חוץ ממספר סופי של נקודות סינגולריות וכל הנקודות אלה היא קוטב.
2. פונקציה $f(z)$ אינה בעלת נקודות סינגולריות על הציר ממשי
3. עבור $R \to \infty$ $\quad M(R) \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{\substack{z = Re^{i\varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi}} |f(z)| \to 0$
4. עבור $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = f(-x)$

אז מתקיים שוויון:

$$F_c(\sigma)\left(=\hat{f}_c(\sigma)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \sigma x \, dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, i \sum \operatorname{res}\left(f(z) e^{i\sigma z}\right), \quad \sigma \geq 0 \qquad (3.1)$$

אם במקום 4 מתקיים תנאי 5

5. עבור $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(-x) = -f(x)$

אז מתקיים שוויון

$$F_s(\sigma)\left(=\hat{f}_s(\sigma)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \sigma x \, dx =$$

$$= \sqrt{2\pi} \sum \operatorname{res}\left(f(z) e^{i\sigma z}\right), \quad \sigma \geq 0 \qquad (3.2)$$

הוכחה

ידוע שאם מתקיימים תנאים 1, 2, 3 אז

עבור $\sigma \geq 0$ מתקיימת נוסחה!

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\text{res}} \left(f(z) e^{i\sigma z} \right)$$

כאשר $z_k, k=\overline{1,n}$ הם קטבים של פונקציה $f(z)$ שנמצאים בחצי מישור עליון. כיוון שמתקיים גם כן (4) אז מקבלים בקלות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx = \int_{-\infty}^{0} f(x) e^{i\sigma x} dx + \int_{0}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{באינטגרל הראשון} \\ \text{נבצע } x := -t \end{matrix} \right| = -\int_{\infty}^{0} f(-t) e^{-i\sigma t} dt + \int_{0}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx =$$

$$= \left| f(-t) = f(t) \right| = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-i\sigma t} dt + \int_{0}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(x) \left[e^{i\sigma x} + e^{-i\sigma x} \right] dx = \left| \cos\sigma x = \frac{e^{i\sigma x} + e^{-i\sigma x}}{2} \right|$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} f(x) \cos\sigma x \, dx \quad \Longrightarrow$$

$$2 \int_{0}^{\infty} f(x) \cos\sigma x \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\text{res}} \left(f(z) e^{i\sigma z} \right)$$

$\Longrightarrow$

$$\left(F_c(f)\right)(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos\sigma x \, dx =$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\text{res}} \left(f(z) e^{i\sigma z} \right).$$

באופן דומה אך במקום (4) נשתמש ב- (5) אז נקבל בקלות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx = \int_{-\infty}^{0} f(x) e^{i\sigma x} dx + \int_{0}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{r} \text{באינטגרל הראשון} \\ \text{נקבע} \\ x=-t \end{array} \right| =$$

$$= -\int_{\infty}^{0} f(-t)\, e^{-i\sigma t}\, dt + \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{i\sigma x}\, dx = \left| f(-t) = -f(t) \right|$$

$$= -\int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\sigma t}\, dt + \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{i\sigma x}\, dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(x) \left[e^{i\sigma x} - e^{-i\sigma x} \right] dx = \left| e^{i\sigma x} - e^{-i\sigma x} = 2i \sin\sigma x \right|$$

$$= 2i \int_{0}^{\infty} f(x) \sin\sigma x\, dx \quad \Longrightarrow$$

$$2i \int_{0}^{\infty} f(x) \sin\sigma x\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\sigma x}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(f(z)\, e^{i\sigma z} \right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left(F_s(f)\right)(\sigma) = \hat{f}_s(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin\sigma x\, dx =$$

$$= \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(f(z)\, e^{i\sigma z} \right) \quad \blacksquare$$