

## שיעורי בית מספר 5

1. יהיו  $u, v \in V$  שני וקטורים כך  $|u| = |v|$ . הוכיחו כי קיימת  $T : V \rightarrow V$  אוניטרית כך ש  $T(u) = v$ . [הדרכה: התחילו במקרה ש  $|u| = |v| = 1$ ]

2. תהא  $T : V \rightarrow V$  נורמלית. הוכיחו כי

(א) לכל  $k$  טבעי מתקיים כי  $T$  מתחלפת עם  $(T^*)^k$

(ב) לכל  $k$  טבעי מתקיים כי  $T^k$  נורמלית.

3. יהי  $T$  אופרטור נורמלי. הוכיחו:

$$\text{(א) } \ker T = \ker T^*$$

$$\text{(ב) } \text{Im} T = \text{Im} T^*$$

$$\text{(ג) } \ker T^k = \ker T, \text{ לכל } k \text{ טבעי,}$$

$$\text{(ד) } \text{Im} T^k = \text{Im} T, \text{ לכל } k \text{ טבעי,}$$

4. תרגיל:  $T : V \rightarrow V$  הרמיטית שכל הע"ע שלה אי שליליים. הוכיחו שקיימת  $S$  הרמיטית כך ש  $T = S^2$

5. תרגיל:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  סימטרית עם ע"ע אי שליליים. אזי:  $\text{tr}(A^2) \leq \text{tr}(A)^2$