תרגיל 1 - אינפי 2 למדמ"ח

נוסחאות שימושיות

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\sum_{i=1}^{n} k = kn$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

שאלה 1

חשבו את האינגרלים הבאים לפי הגדרה של אינגרל מסויים:

א) $\int_1^3 \left(x^2 - x - 2\right) dx$

פתרון:

הפונקציה $f(x) = x^2 - x - 2$ רציפה בקטע $[1,3]$ ולכן אינטגרבילית בו ולכן ניתן לבחור כל חלוקה של הקטע הנ"ל לחישוב האינטגרל נבחר חלוקה שווה כך ש- $\triangle x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

בכל תת קטע נבחר נק' קצה ימנית בתור α_k, כלומר $\alpha_k = 1 + \frac{2k}{n}$ ונקבל:

$$\int_1^3 \left(x^2 - x - 2\right) dx = lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{2k}{n}\right) - 2\right) \frac{2}{n} =$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{n} + \left(\frac{2k}{n}\right)^2 - 2\right) = lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} 1\right) =$$

$$= lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4}{n} \cdot n\right) = \frac{4}{2} + \frac{16}{6} - 4 = \frac{2}{3}$$

ב) $\int_0^4 \sqrt{x} dx$

פתרון:

$k = 0, 1, , , , n$, $\frac{4k^2}{n}$ נקודת חלוקה.

$\triangle x_k = \frac{4k^2}{n^2} - \frac{4(k-1)^2}{n^2}$, אורך תת קטע $[x_{k-1}, x_k]$, $\alpha_k = \frac{4k^2}{n^2}$ קצה ימני של תת קטע $[x_{k-1}, x_k]$ שנציב בפונקציה לחישוב סכום רימן.

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx = lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{4k^2}{n^2}} \left(\frac{4k^2}{n^2} - \frac{4(k-1)^2}{n^2}\right) =$$

$$= lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n} \left(\frac{8k}{n^2} - \frac{4}{n^2}\right) = lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{16k^2}{n^3} - \frac{8k}{n^3}\right) = lim_{n\to\infty} \left(\frac{16}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k\right) =$$

$$lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{16\cdot 2}{6}=\frac{16}{3}$$

ג) $\int_{-1}^{2}x^3dx$

פתרון:

$$f\left(x_k\right)=\left(\frac{3k}{n}-1\right)^3\to f\left(x_k\right)=\frac{27k^3}{n^3}-\frac{27k^2}{n^2}+\frac{9k}{n}-1$$

$$\triangle x=\frac{3}{n}\to x_k=\frac{3k}{n}-1$$

$$f\left(x_k\right)\triangle x=\left(\frac{27k^3}{n^3}-\frac{27k^2}{n^2}+\frac{9k}{n}-1\right)\frac{3}{n}=\frac{81k^3}{n^4}-\frac{81k^2}{n^3}+\frac{27k}{n^2}-\frac{3}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k\right)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{81k^3}{n^4}-\frac{81k^2}{n^3}+\frac{27k}{n^2}-\frac{3}{n}\right)=$$

$$=\frac{81}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{81}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{27}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}1=$$

$$=\frac{81}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{81}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{27}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{3}{n}\cdot n=$$

$$=\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-3$$

$$\int_{-1}^{3}x^3dx=lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-3\right]=$$

$$\frac{81}{4}\cdot 1-\frac{27}{2}\cdot 1\cdot 2-3=\frac{15}{4}$$

ד) $\int_{2}^{5}\left(8x-x^2\right)dx$

פתרון:

$$\Delta x=\frac{5-2}{n}=\frac{3}{n}$$

$$f\left(x_k\right)=8\cdot\left(2+\frac{3k}{n}\right)-\left(2+\frac{3k}{n}\right)^2=\frac{9k^2}{n^2}+\frac{12k}{n}+12$$

$$x_k=2+k\cdot\frac{3}{n}=2+\frac{3k}{n}$$

$$f\left(x_k\right)\cdot\Delta x=\left(-\frac{9k^2}{n^2}+\frac{12k}{n}+12\right)\cdot\frac{3}{n}=-\frac{27k^2}{n^3}+\frac{36k}{n^2}+\frac{36}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k\right)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{27k^2}{n^3}+\frac{36k}{n^2}+\frac{36}{n}\right)=-\frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{36}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+$$

$$\frac{36}{n}\sum_{k=1}^{n}1=$$

$$=-\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{36}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{36}{n}\cdot n=$$

$$=-\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+36$$

$$\int_{2}^{5}\left(8x-x^2\right)dx=lim_{n\to\infty}\left[-\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+36\right]=45$$

שאלה 2

הוכיחו : אם f אינטגרבילית ב־$[a,b]$ ו־$c\in\mathbb{R}$ קבוע, אז $c\cdot f$ אינטגרבילית ב־$[a,b]$ ומתקיים:

$$\int_{a}^{b}cf\left(x\right)dx=c\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx$$

פתרון:

תהי T חלוקה נורמלית של $[a,b]$ כלומר $max\Delta x_k = \mu(T) \to 0$

לפי ההגדרה של אינטגרל מסויים נקבל:

$$c\int_a^b f(x)\,dx = c\cdot lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k = lim_{\mu(T)\to 0} c\cdot\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k =$$
$$= lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\alpha_k)\Delta x_k = \int_a^b cf(x)$$

המעבר הראשון (משמאל ימינה) נכון לפי ההגדרה של אינטגרל מסויים (נתון שהפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית ב $[a,b]$)

המעבר השני - לפי תכונת הגבול

מעבר האחרון - זוהי בדיוק הגדרה של אינטגרל מסויים. ולכן cf אינטגרבילית ב-$[a,b]$ כדרוש.

שאלה 3

הוכיחו: אם $f(x)$ רציפה ב-$[-a,a]$ ואי זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

פתרון:

$f(x)$ רציפה ב-$[-a,a]$ ולכן אינטגרבילית לפי רימן בקטע ולכן האינטגרל $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ אינו תלוי בבחירה של חלוקה נורמלית של הקטע $[-a,a]$ וגם לא בבחירת הנקודות α_k בכל תת קטע של החלוקה. לכן נבחר חלוקה נורמלית

$T_1 : 0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = a$ של הקטע $[0,a]$ ו-$\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ כלשהוא וכן נבחר חלוקה

$T_2 : -a = -x_n < -x_{n-1} < -x_{n-2} < .... < -x_1 < 0$ של הקטע $[-a,0]$ ו-$-\alpha_k \in [-x_k, -x_{k-1}]$ החלוקה $T = T_1 \cup T_2$ היא חלוקה נורמלית של $[-a,a]$ ולכן לפי ההגדרה של אינטגרל מסויים נקבל:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\alpha_k)\Delta x_k + f(-\alpha_k)\Delta x_k\right) =$$
$$= lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\alpha_k)\Delta x_k - f(\alpha_k)\Delta x_k\right) = 0$$

במעבר האחרון השתמשנו באי זוגיות של הפונקציה.

שאלה 4

האם הפונקציה הבאה הינה אינטגרבילית? נמק את תשובתך:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \frac{1}{2}<x\le 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n} \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

פתרון:

פונקציה זו היא מונוטונית עולה וחסומה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית.

שאלה 5

חשבו את האינטגרלים המסויימים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות המתאימות מהנדסת המישור:

א) $\int_{-1}^{3}|2x-3|\,dx$

פתרון:

האינטרל הנ"ל שווה לסכום של שני שטחי משולשים:

$$S_1=\frac{5\cdot\left(\frac{3}{2}-(-1)\right)}{2}=\frac{25}{4}$$

$$S_2=\frac{2-\frac{3}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

ולסיכום נקבל

$$\int_{-1}^{2}|2x-3|\,dx=S_1+S_2=\frac{25}{4}+\frac{1}{4}=\frac{26}{4}=\frac{13}{2}$$

ב) $\int_0^{10}\sqrt{10x-x^2}dx$ (רמז: השלימו לריבוע)

פתרון:

$$\int_0^{10}\sqrt{10x-x^2}dx=\int_0^{10}\sqrt{25-(25-10x+x^2)}dx=\int_0^{10}\sqrt{10-(x-5)^2}dx$$

וזהוא שטח של חצי עיגול שמרכזו בנקודה $(5,0)$ורדיוסו 5 ולכן $\frac{25\pi}{2}$.